

江苏联合职业技术学院
第五届高职学生数学能力竞赛 (2023)
高职二年级试卷 (闭卷) 参考答案

一、基础知识和基本技能 (本题满分 40 分, 每题 4 分.)

1. $\frac{12}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{18}$ 2. D 3. 5 千米 4. $A + \bar{C}$ 5. 57000 6. B

7. $i < 6$, 也可以填 $i \leq 6, i < 7$ 等 8. 2250 立方厘米 9. $\sqrt{3}$ 10. BCD (注: 若所选答案中有错误选项, 该题得零分, 如果全部选对得 4 分, 若所选答案中没有错误选项, 但是正确选项未全部选出, 则得 2 分.)

二、能力考查 (本题满分 40 分, 每题 10 分.)

11. 解: (1) $\left| \frac{x+1}{2} - \frac{3}{x} \right| = x^2 + x - 6 < 0$ -----2 分

即 $(x+3)(x-2) < 0$

所以 $-3 < x < 2$

所以不等式的解集为 $(-3, 2)$ -----5 分

(2) $f(x) = \left| \frac{\sin x + 1}{3} - \frac{1}{2} \right| = 2\sin x - 1$ -----7 分

当 $\sin x = 1$ 时, $f(x)_{\max} = 1$ -----10 分

12. 解: (1) 设 A 公司每年年薪构成数列 $\{a_n\}$, 依题意, 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 65000$, 公差 $d = 5000$. -----1 分

则 $a_5 = a_1 + 4d = 65000 + 4 \times 5000 = 85000$

即小赵在第 5 年的年薪为 85000 元. -----3 分

(2) 设 B 公司每年年薪构成数列 $\{b_n\}$, 依题意, 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $b_1 = 60000$, 公比 $q = 1.1$. -----4 分

则 $b_5 = b_1 \times q^4 = 60000 \times 1.1^4 = 87846$ 元

即小赵在第 5 年的年薪为 87846 元. -----6 分

(3) 设 A 公司前 10 年年薪和为 S_1 , B 公司前 10 年年薪和为 S_2 .

则 $S_1 = a_1 \times 10 + \frac{1}{2} \times 10 \times 9 \times 5000 = 875000$ 元 -----7 分

则 $S_2 = \frac{b_1(1-1.1^{10})}{1-1.1} \approx 956245$ 元 -----8 分

因为 $S_2 > S_1$

所以，仅从年薪收入总量较多作为应聘的标准，他应选择 B 公司. -----10 分

13. 解：由图中数据可知体力的周期为 $T_1 = 23$ ，情绪的周期为 $T_2 = 28$ ，智力的周期为 $T_3 = 33$ -----4 分

从同学甲出生到今日的天数为 5850

对于体力，有 $5850 = 23 \times 254 + 8$ ，处于高潮期，体力充沛-----6 分

对于情绪，有 $5850 = 28 \times 208 + 26$ ，处于低潮期，心情烦躁-----8 分

对于智力，有 $5850 = 33 \times 177 + 9$ ，处于高潮期，思维敏捷

所以今日同学甲体力充沛，心情烦躁，思维敏捷. -----10 分

14. 解：(1) $y_1 = 200 \times 0.75x = 150x$ -----2 分

(2) $y_2 = 200 \times 0.8(x - 1) = 160x - 160$ -----4 分

(3) 当 $y_1 = y_2$ 时，即 $150x = 160x - 160$

得 $x = 16$ -----6 分

当 $y_1 > y_2$ 时，即 $150x > 160x - 160$ -----8 分

得 $x < 16$

当 $y_1 < y_2$ 时，即 $150x < 160x - 160$

得 $x > 16$

答：当参观人数为 16 人时，任选一家旅行社，当参观人数在 10 到 15 人时，选乙旅行社，当参观人数为 17 到 25 人时，选甲旅行社. -----10 分

三、数学文化（本题满分 40 分，每题 10 分.）

15. 解：(1) 第 8 行的数依次为 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1-----3 分

(2) $a_5 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ -----4 分

(3) $a_n = 2^{n-1}$ -----6 分

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n - 1$ -----10 分

16. 解：依题意得，八个子女所得棉花斤数依次构成等差数列，设该等差数列为 $\{a_n\}$ ，公差为 d ，前 n 项和为 S_n ，第一个孩子所得棉花斤数为 a_1 . -----2 分

则由题意得， $d = 17, S_8 = 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times 17 = 996$ -----5 分

解得 $a_1 = 65$ -----7 分

$\therefore a_8 = a_1 + (8 - 1)d = 184$. -----9 分

答：第 8 个孩子分到的棉花为 184 斤. -----10 分

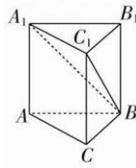
17. 解：由阳马定义知

$$V_{B-A_1ACC_1} = \frac{1}{3} \times A_1A \times AC \times BC = \frac{2}{3} AC \times BC \text{-----3 分}$$

$$\leq \frac{1}{3}(AC^2 + BC^2) = \frac{1}{3}AB^2 = \frac{4}{3} \text{-----6 分}$$

当且仅当 $AC = BC = \sqrt{2}$ 时等式成立-----7 分

$\therefore V_{B-A_1ACC_1}$ 最大时，则堑堵 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = S_{ABC} \times AA_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2 = 2$ -----10 分



18. 解：(1) $\because AB=AC$ ，由题意可得三角形 ABC 的欧拉线为 BC 的中垂线

由 $B(-1, 3)$ ， $C(4, -2)$ 可得 BC 的中点为 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ -----1 分

$$k_{BC} = \frac{3+2}{-1-4} = -1 \text{-----2 分}$$

$\therefore BC$ 的中垂线的斜率 $k=1$ -----3 分

\therefore 线段 BC 的中垂线方程为： $y - \frac{1}{2} = x - \frac{3}{2}$ ，即 $x - y - 1 = 0$

即 $\triangle ABC$ 的“欧拉线”方程为 $x - y - 1 = 0$ -----4 分

(2) \because 三角形 ABC 的“欧拉线”与圆 $M: (x - 3)^2 + y^2 = r^2$ 相切

\therefore 圆心 $(3, 0)$ 到直线 $x - y - 1 = 0$ 的距离 $d = r = \frac{|3-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ -----6 分

\therefore 圆 M 的方程为： $(x - 3)^2 + y^2 = 2$ -----7 分

令 $t = x + \sqrt{3}y$ ， $\therefore y = \frac{t-x}{\sqrt{3}}$ ，代入圆 M 的方程 $(x - 3)^2 + y^2 = 2$

可得 $4x^2 - (18+2t)x + t^2 + 21 = 0$ ，由于 (x, y) 在圆上， $\therefore 4x^2 - (18+2t)x + t^2 + 21 = 0$

有根

则 $\Delta = (18+2t)^2 - 4 \times 4 \times (t^2 + 21) \geq 0$ ，整理得： $t^2 - 6t + 1 \leq 0$ ，解得： $3 - 2\sqrt{2} \leq t \leq 3 + 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore x + \sqrt{3}y$ 的最小值为 $3 - 2\sqrt{2}$ ， $x + \sqrt{3}y$ 的最大值为 $3 + 2\sqrt{2}$. -----10 分

四、问题解决（本题满分 30 分.）

19. 解：(1) $A(m, n)$ 在 O 的东北方向 $40\sqrt{2}km$ 处

$$m = 40\sqrt{2}\cos 45^\circ = 40, \quad n = 40\sqrt{2}\sin 45^\circ = 40$$

所以A(40, 40) -----4 分

B 在 O 的正东方向 20km 处

所以B(20, 0) -----6 分

由两点间的距离公式得 $|AB| = \sqrt{(40-20)^2 + (40-0)^2} = 20\sqrt{5}(km)$ -----10 分

(2) 设过 O、A、B 三点的圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

将 O(0,0)、A(40,40)、B(20,0) 代入上式得
$$\begin{cases} F = 0 \\ 40^2 + 40^2 + 40D + 40E + F = 0 \\ 20^2 + 20D + F = 0 \end{cases}$$
 -----13 分

解得
$$\begin{cases} D = -20 \\ E = -60 \\ F = 0 \end{cases}$$
 -----15 分

所以圆的方程为 $x^2 + y^2 - 20x - 60y = 0$ ，即 $(x-10)^2 + (y-30)^2 = 1000$ -----18 分

故圆心为 (10,30)，半径 $r = 10\sqrt{10}$. -----20 分

(3) 设船起初所在的位置为点 C(a, b)，则

$$a = -20\cos 60^\circ = -10$$

$$b = -20\sin 60^\circ = -10\sqrt{3}$$

所以C(-10, -10√3) -----20 分

该船航线所在直线的斜率为 $k = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ -----22 分

由点斜式得该船航线所在直线的方程 $l: x - \sqrt{3}y - 20 = 0$ -----24 分

所以圆心 (10,30) 到 $l: x - \sqrt{3}y - 20 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|10 - 30\sqrt{3} - 20|}{\sqrt{1+3}} = 5 + 15\sqrt{3}$ -----26 分

由于 $(5 + 15\sqrt{3})^2 = 700 + 150\sqrt{3}$ ， $(10\sqrt{10})^2 = 1000 > 700 + 150\sqrt{3}$

即 $d = 5 + 15\sqrt{3} < 10\sqrt{10}$ -----29 分

所以该船有触礁的危险. -----30