

江苏联合职业技术学院  
第五届高职学生数学能力竞赛（2023）  
高职二年级试卷（闭卷）  
（满分 150 分，考试时间 150 分钟）

分院：\_\_\_\_\_ 专业：\_\_\_\_\_ 年级：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 得分：\_\_\_\_\_

注意事项：

1. 本试卷共四大题，19 小题，满 150 分；
2. 考生领到试卷后，须按规定在试卷上填写分院、专业、年级、姓名，要求字迹清晰；
3. 所有答案必须在试卷指定的区域内作答；
4. 答题过程务必保持卷面完整、整洁、清晰；
5. 考试结束后，请将本试卷及草稿纸交到监考员处。

**一、基础知识和基本技能（本题满分 40 分，每题 4 分.）**

1. 将一个骰子连掷三次，它落地后向上的点数依次成等差数列的概率是\_\_\_\_\_.
2. 一辆快车从甲地驶往乙地，一辆慢车从乙地驶往甲地，两车同时出发，匀速行驶，设行驶的时间为  $x$  小时，两车之间的距离为  $y$  千米，如图 1 所示中的折线表示从两车出发至快车到达乙地的过程中  $y$  与  $x$  的函数关系，则图中  $B$  点的实际意义是（     ）  
A. 快车到达了目的地                      B. 慢车到达了目的地  
C. 快车、慢车还没有出发                D. 快车、慢车相遇了

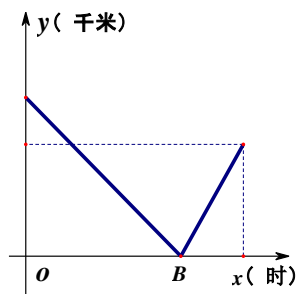


图 1

3. 已知向量  $\vec{a}$  表示从学校往正北方向出发，到相距 6 千米的超市，向量  $\vec{b}$  表示从学校往正西方向出发，到相距 4 千米的游乐场，若向量  $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$  表示从学校出发到公园的方

向和距离，则学校和公园相距\_\_\_\_\_.

4. 化简：  $\overline{AC} + \overline{BC} =$ \_\_\_\_\_.

5. 为增强学生绿色环保意识，某学校组织了一次活动，要求全校 50 个班级统计一周内班级使用塑料袋的数量，现从中随机抽取 5 个班级使用塑料袋的数量：41, 53, 60, 62, 69，若一学期按 20 周计算，试估算全校一学期大约要使用\_\_\_\_\_只塑料袋.

6. 已知偶函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加，且  $f(2) = 0$ ，则  $f(x) < 0$  的解集为( )

A.  $\{x | 0 < x < 2\}$

B.  $\{x | -2 < x < 2\}$

C.  $\{x | -2 < x < 0\}$

D.  $\{x | x > 2 \text{ 或 } x < -2\}$

7. 阅读如图 2 所示的程序框图，若输出  $s$  的值为 -7，则判断框内可填写 ( )

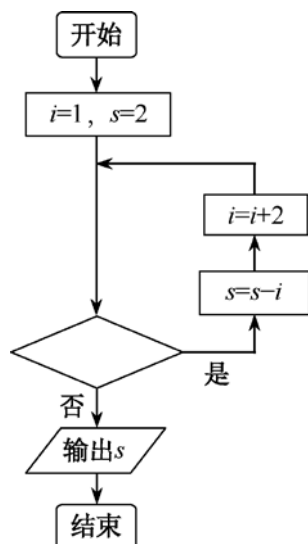


图 2

8. 如图 3 所示，有一边长为 40 厘米的正方形纸板，现将阴影部分剪去，沿虚线折起来，使之成为一个有盖的长方体纸盒（其中①与③，②与④，⑤与⑥分别是全等的矩形），设左上，左下方剪去的正方形的边长为 5 厘米，则纸盒的容积为\_\_\_\_\_.

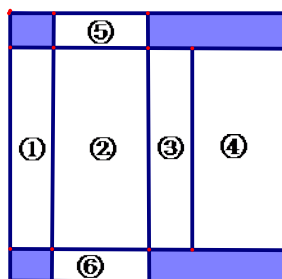


图 3

9. 如果实数  $x, y$  满足  $(x-2)^2+y^2=3$ , 则  $\frac{y}{x}$  的最大值为\_\_\_\_\_.

10. 德国著名数学家狄利克雷在数学领域成就显著, 函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$  称

为狄利克雷函数, 关于  $f(x)$ , 下列说法正确的是( ) (注意: 可能不止一个正确答案)

A.  $f(x)$  的值域为  $[0,1]$

B.  $f(x)$  的定义域为  $R$

C. 对任意的  $x \in R, f(f(x)) = 1$

D. 任意一个非零有理数  $T, f(x+T) = f(x)$  对任意  $x \in R$  恒成立

## 二、能力考查 (本题满分 40 分, 每题 10 分.)

11. 定义  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

(1) 求不等式  $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$  的解集.

(2) 求  $f(x) = \begin{vmatrix} \sin x + 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$  的最大值.

12. 在一次招聘会上，有 **A**, **B** 两家公司分别开出了他们的工资标准：**A** 公司承诺第一年年薪 65000 元，以后每年年薪比上一年增加 5000 元，**B** 公司承诺第一年年薪 60000 元，以后每年年薪比上一年递增 10%，假设小赵年初被 A、B 两家公司同时录取，试问：

(1) 若小赵在 **A** 公司连续工作 5 年，则他在第 5 年的年薪是多少？

(2) 若小赵在 **B** 公司连续工作 5 年，则他在第 5 年的年薪是多少？

(3) 若小赵打算连续在一家公司工作 10 年，仅从年薪收入总量较多作为应聘的标准（不记其它因素），他应选择哪家公司，为什么？（精确到 1 元）

（可能用到的数据： $1.1^4=1.4641$ ， $1.1^5=1.61051$ ， $1.1^9=2.35795$ ， $1.1^{10}=2.59374$ ）

13. 从出生之日起，人的体力、情绪、智力变化，在第一个周期内它们的变化规律如图 4 所示（均为正弦型曲线）：

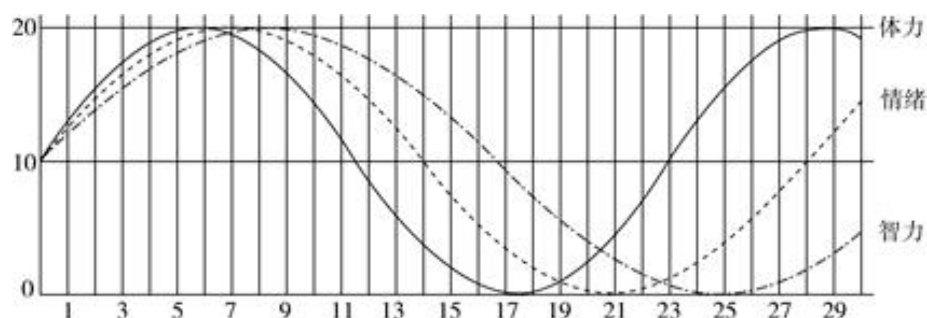


图 4

体力、情绪、智力在从出生之日起的每个周期中又存在着高潮期（前半个周期）和低潮期（后半个周期）。它们在一个周期内的表现如下表所示：

	高潮期	低潮期
体力	体力充沛	疲倦乏力
情绪	心情愉快	心情烦躁
智力	思维敏捷	反应迟钝

如果从同学甲出生到今日的天数为 5850，那么今日同学甲的体力、情绪和智力各处于高潮期还是低潮期？试写出你的推理过程。

14. 为加强爱国主义教育，某单位计划组织员工到上海参观中共一大会址，人数估计在 10 到 25 人，甲，乙两个旅行社报价均为每人 200 元，且服务质量相同，甲旅行社表示可给予每位参观人员 75 折优惠，乙旅行社表示先免去一位参观人员的费用，其他参观人员按 8 折优惠。

- (1) 写出甲旅行社所需收费 $y_1$ （元）与参观人数 $x$ （人）之间的关系式。
- (2) 写出乙旅行社所需收费 $y_2$ （元）与参观人数 $x$ （人）之间的关系式。
- (3) 该单位选择哪一家旅行社支付的费用较少？

### 三、数学文化（本题满分40分，每题10分.）

15. 杨辉，字谦光，汉族，钱塘（今浙江省杭州）人，南宋杰出的数学家.他是世界上第一个排出丰富的纵横图和讨论其构成规律的数学家.杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书中有如图 5 所示中的表，称为杨辉三角，杨辉三角揭示的是二项式乘方展开式的系数规律，即二项式定理，这是我国数学史上的一个伟大成就.

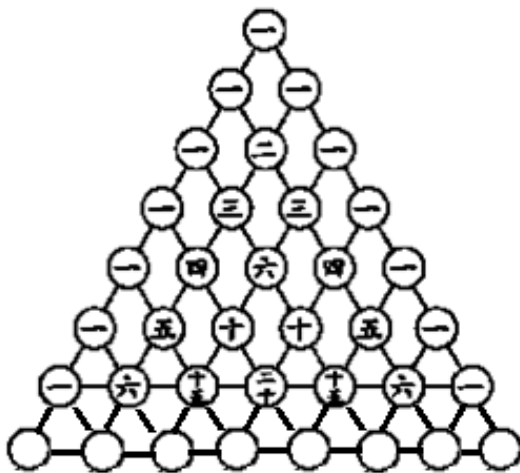


图 5

在杨辉三角中，每一行数字之和有很强的规律.我们把第 1 行数字之和记为 $a_1 = 1$ , 第 2 行数字之和记为 $a_2 = 1 + 1 = 2$ , 第 3 行数字之和记为 $a_3 = 1 + 2 + 1 = 4$ , -----, 构成一个数列 $\{a_n\}$ .

- (1) 请你观察上图中的规律，依次写出第 8 行每个小圆中的数.
- (2) 求出第 5 行数字之和 $a_5$ .
- (3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (4) 求数列 $\{a_n\}$ 的前  $n$  项和 $S_n$ .

16. 我国古代数学名著《算法统宗》中说：“九百九十六斤棉，赠分八子做盘缠。次第每人多十七，要将第八数来言。务要分明依次第，孝和休惹外人传。”这句话的大意是“996 斤棉花，分别赠送给 8 个子女做旅费，从第 1 个孩子开始，以后每人依次多 17 斤，直到第 8 个孩子为止。分配时一定要按照次序分，要顺从父母，兄弟间和气，不要引得外人说闲话。”在这个问题中，第 8 个孩子分到的棉花为多少？

17. 《九章算术》是我国古代数学名著，它在几何学中的研究比西方早一千多年.例如堑堵指底面为直角三角形，且侧棱垂直于底面的三棱柱；阳马指底面为矩形，一侧棱垂直于底面的四棱锥.如图 6 所示，在堑堵 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AC \perp BC$ ，若 $AA_1 = AB = 2$ ，当阳马 $B - A_1ACC_1$ 的体积最大时，求堑堵 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积.

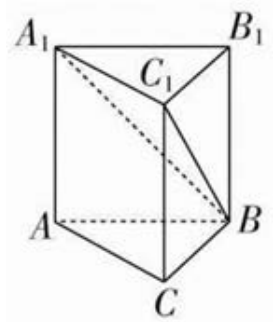


图 6

18. 瑞士著名数学家欧拉在 1765 年发现了一个定理：三角形的外心、重心、垂心位于同一直线上．这条直线被后人称为三角形的“欧拉线”．在平面直角坐标系中作  $\triangle ABC$ ,  $AB=AC=4$ ,  $B(-1, 3)$ ,  $C(4, -2)$ , 且其“欧拉线”与圆  $M: (x-3)^2 + y^2 = r^2$  相切．

(1) 求  $\triangle ABC$  的“欧拉线”方程．

(2) 点  $(x, y)$  在圆  $M$  上, 求  $x+\sqrt{3}y$  的最值．

#### 四、问题解决（本题满分 30 分.）

19. 如图 7 所示，某海面上有  $O$ 、 $A$ 、 $B$  三个小岛（面积大小忽略不计）， $A$  岛在  $O$  岛的北偏东  $45^\circ$  方向  $40\sqrt{2}km$  处， $B$  岛在  $O$  岛的正东方向  $20km$  处. 现以  $O$  为坐标原点， $O$  的正东方向为  $x$  轴正方向， $1km$  为单位长度，建立平面直角坐标系.

(1) 写出  $A$ 、 $B$  的坐标，并求  $A$ 、 $B$  两岛之间的距离.

(2) 求经过  $O$ 、 $A$ 、 $B$  三个点的圆的方程.

(3) 已知经过  $O$ 、 $A$ 、 $B$  三个点的圆形区域内有未知暗礁，现有一船在  $O$  岛的南偏西  $30^\circ$  方向距  $O$  岛  $20km$  处，正沿着北偏东  $60^\circ$  行驶，若不改变方向，试问该船有没有触礁的危险？

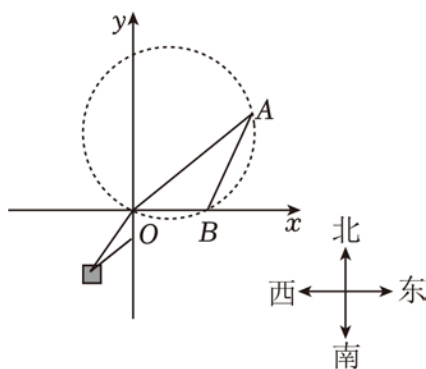


图 7