

江苏联合职业技术学院  
第四届高职学生数学能力竞赛 (2022)  
高职二年级试卷 (答案)

一、基础知识和基本技能 (本题满分 40 分, 每题 4 分.)

1.  $\frac{41+53+60+62+69}{5} \times 18 \times 50 = 51300$

2. 50, 乙

3. (-1,2)

4.  $\overline{AB}$

5. C

6. B

7. 解: 设从上到下第  $n(n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq 8)$  层的浮雕个数为  $a_n$ , 公比为  $q$ , 由题意可知,

$$\begin{cases} a_1 q = 6 \\ a_1 q^4 = 48 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases} \therefore a_n = 3 \cdot 2^{n-1}, a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384$$

8. 66

9.  $-1 \pm 2\sqrt{2}$

10.  $S = S + i, i = i + 2$

二、能力考查 (本题满分 40 分, 第 11 题 7 分, 第 12 题 9 分, 第 13, 14 题每题 10 分.)

11. 解: 设团队人数为  $x(x < 15)$  人

$$30 \times 80\% \times 15 \leq 30x \text{----- (5 分)}$$

$$x \geq 12$$

所以, 当团队人数不少于 12 人时, 买团体票最省钱, 少于 12 人时买全票.--- (7 分)

12. 解: (1)  $y = 30 \times (1 + 8\%)^x = 30 \times 1.08^x, x \in \mathbb{N}_+$

$$y = 30 \times 1.08^5 \text{----- (3 分)}$$

$$(2) \text{ 令 } 30 \times 1.08^x = 50$$

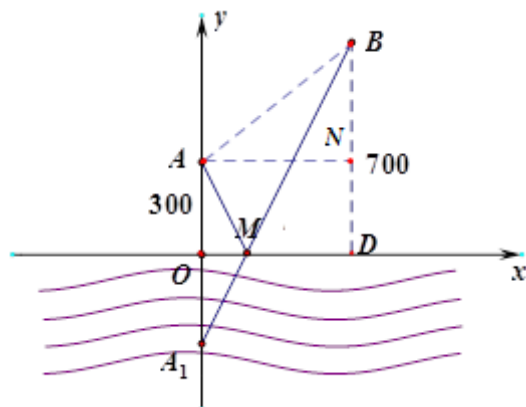
$$\text{则 } 1.08^x = \frac{5}{3}$$

$$\text{所以 } x = \log_{1.08} \frac{5}{3} \approx 7 \text{----- (6 分)}$$

$$(3) y = 30 \times (1 + a)^5 = 50$$

$$a \approx 11\% \text{----- (9 分)}$$

13. 解: 建立如图所示的直角坐标系, 延长  $AC$  到点  $A_1$ , 使  $CA_1 = AC$ , 连接  $BA_1$  交  $CD$  于点  $M$ , 点  $M$  就是所选择的位置.----- (3 分)



作  $AN \perp BD$ ,  $N$  为垂足, 则  $BN=400$ ,  $AN=300$

由已知, 得  $A(0, 300)$ ,  $A_1(0, -300)$ ,  $B(300, 700)$  ----- (6 分)

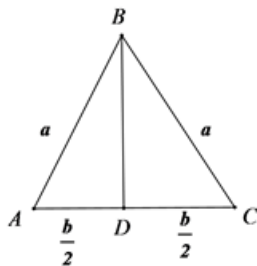
$$K = \frac{-300-700}{0-300} = \frac{10}{3}$$

$A_1B$  的方程是  $y = \frac{10}{3}x - 300$  ----- (9 分)

令  $y=0$ , 则  $x=90$

即水电站建于距  $O$  点 90 米处送电到两村电线用料最短. ----- (10 分)

14. 解: 如图, 等腰三角形  $\triangle ABC$ ,  $\angle ABC = 36^\circ$ ,  $AB = BC = a$ ,  $AC = b$ , 取  $AC$  中点  $D$ , 连接  $BD$ .  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , ----- (3 分)



由题意可得  $\sin \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  ----- (5 分)

所以  $\cos \angle ABC = 1 - 2\sin^2 \frac{\angle ABC}{2} = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ , ----- (8 分)

所以  $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ , 所以  $\sin 126^\circ = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ . ----- (10 分)

### 三、数学文化 (本题满分40分, 前两题每题8分, 后两题每题12分.)

15. 解: 依题意, 每尺的重量由大到小构成等差数列  $\{a_n\}$ ,  $a_1 = 4$ ,  $a_5 = 2$  ---- (2 分)

$$d = \frac{2-4}{5-1} = -\frac{1}{2} \text{----- (5 分)}$$

则中间三段的重量  $a_2 = a_1 + d = \frac{7}{2}$ ,  $a_3 = a_1 + 2d = 3$ ,  $a_4 = a_1 + 3d = \frac{5}{2}$ ----- (8 分)

16.解: 
$$\begin{cases} 2a_2 - a_1 = 3 \\ 3a_3 - 2a_2 = 5 \\ \dots\dots\dots \\ na_n - (n-1)a_{n-1} = 2n-1 \end{cases}, \text{----- (3 分)}$$

累加得:  $na_n - a_1 = 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ ,  $\because a_1 = 1$ ----- (5 分)

$na_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ ,  $n=1$  也符合, 则  $a_n = n$ ,  $\therefore b_n = [lgn]$

则  $1 \leq n \leq 9$  时,  $b_n = 0$ ;  $10 \leq n \leq 99$  时,  $b_n = 1$ ;  $100 \leq n \leq 999$  时,  $b_n = 2$ ;

$1000 \leq n \leq 2023$  时,  $b_n = 3$ ; ----- (7 分)

$$T_{2023} = 9 \times 0 + 90 \times 1 + 900 \times 2 + 1024 \times 3 = 4962 \text{----- (8 分)}$$

17. (1)、(4) 正确----- 注: 每叙述一小题正确答案, 给 2 分

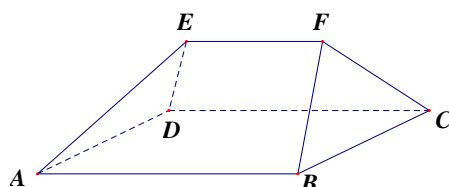
$4^{10} = 2^{20}$ , 所以  $\lg 4^{10} = \lg 2^{20} = 20 \lg 2 = 6.02$ , 所以 (1) 是正确的

因为  $\lg m^{100} = 100 \lg m$ , 所以  $69 \leq 100 \lg m < 70$ , 即  $0.69 \leq \lg m < 0.7$ , 所以 (4) 正确

解: 因为  $\lg 2^{50} = 50 \lg 2 \approx 50 \times 0.301 = 15.05$ , 要判断  $2^{50}$  的位数, 只要求出  $\lg 2^{50}$  的近似值, 所以  $2^{50} \in (10^{15}, 10^{16})$ , 即  $2^{50}$  是 16 位数, 所以 (2) 是错误的

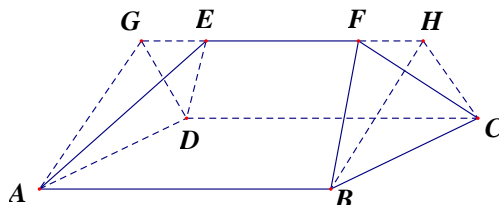
因为  $\lg 3^{-20} = -20 \lg 3 \approx -20 \times 0.477 = -9.54$ , 所以  $3^{-20} \approx 10^{-9.54} = 10^{0.46} \times 10^{-10}$ , 所以  $m = -10$ , 故 (3) 是错误的。

18. 解: (1) 该楔体的几何图形:



----- (3 分)

(2) 分别延长 EF 至 H, FE 至 G, 使得 EG=FH=1, 连结 AG, DG, BH, CH. 如图所示:



则三棱柱 AH 为直三棱柱, 底面 ADG 是等腰三角形, AD 边上高  $h=1$ ,

$$\text{面积 } S_{ADG} = \frac{1}{2} AD \times h = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$$

$$V_{\text{三棱柱 AH}} = S_{ADG} \times AB = \frac{3}{2} \times 4 = 6 \text{----- (8 分)}$$

三棱锥 E-ADG 与 F-BCH 的体积相等，

$$V_{\text{三棱锥 E-ADG}} = \frac{1}{3} \times S_{ADG} \times EG = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \text{----- (10 分)}$$

$$V_{\text{楔体}} = V_{\text{三棱柱 AH}} - 2V_{\text{三棱锥 E-ADG}} = 6 - 1 = 5 \text{ 立方丈} = 5000 \text{ 立方尺} \text{----- (12 分)}$$

#### 四、问题解决（本题满分 30 分.）

19. 解：（1）由题意可知，符合本题的函数模型必须满足定义域为 $[0,120]$ ，且在 $[0,120]$ 上为增函数；-----（4 分）

函数  $F(v) = \left(\frac{1}{2}\right)^v + a$  在 $[0,120]$ 是减函数，所以不符合题意；-----（6 分）

而函数  $F(v) = k \log_a v + b$  的  $v \neq 0$ ，即定义域不可能为 $[0,120]$ ，也不符合题意--（8 分）

所以选择函数  $F(v) = av^3 + bv^2 + cv$ .

$$\text{由已知数据得：} \begin{cases} 40(40^2a + 40b + c) = \frac{20}{3} \\ 60(60^2a + 60b + c) = \frac{65}{8} \\ 80(80^2a + 80b + c) = 10 \end{cases} \text{----- (14 分)}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = \frac{1}{38400} \\ b = -\frac{1}{240} \\ c = \frac{7}{24} \end{cases} \text{----- (18 分)}$$

$$\text{所以，} F(v) = \frac{1}{38400}v^3 - \frac{1}{240}v^2 + \frac{7}{24}v (0 \leq v \leq 120) \text{----- (20 分)}$$

（2）设这辆车在该测试路段的总耗油量为 $y$ ，行驶时间为 $t$ ，由题意得：

$$y = F \cdot t \text{----- (23 分)}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{1}{38400}v^3 - \frac{1}{240}v^2 + \frac{7}{24}v \right) \cdot \frac{240}{v} \text{----- (25 分)} \\ &= \frac{1}{160}v^2 - v + 70 = \frac{1}{160}(v - 80)^2 + 30 \end{aligned}$$

因为 $0 \leq v \leq 120$ ，所以，当 $v = 80$ 时， $y$ 有最小值 30.-----（29 分）

所以，这辆车在该测试路段上以  $80\text{km/h}$  的速度行驶时总耗油量最少，最少为 30L.-----（30 分）