

江苏联合职业技术学院
第四届高职学生数学能力竞赛（2022）
高职二年级试卷（闭卷）
（满分 150 分，考试时间 150 分钟）

分院：_____ 专业：_____ 年级：_____ 姓名：_____ 得分：_____

注意事项：

1. 本试卷共四大题，19 小题，满 150 分；
2. 考生领到试卷后，须按规定在试卷上填写分院、专业、年级、姓名，要求字迹清晰；
3. 所有答案必须在试卷指定的区域内作答；
4. 答题过程务必保持卷面完整、整洁、清晰；
5. 考试结束后，请将本试卷及草稿纸交到监考员处。

一、基础知识和基本技能（本题满分 40 分，每题 4 分.）

1. 为增强学生绿色环保意识，某学校组织了一次活动，要求全校 50 个班级统计一周内班级使用塑料袋的数量，现从中随机抽取 5 个班级使用塑料袋的数量：41, 53, 60, 62, 69，若一学期按 18 周计算，试估算全校一学期大约要使用_____只塑料袋.

2. 某班从甲、乙、丙三名候选人中选举一名学生代表，每张选票上只能选一人或不选，否则视为无效票. 得票超过半数者当选，无人超过半数时，得票前两位者再进行第二轮选举. 全班同学参加了投票，得票情况统计表和饼图如图 1 所示：

得票数量统计表

项目	甲	乙	丙	其他
票数	20	x	3	1

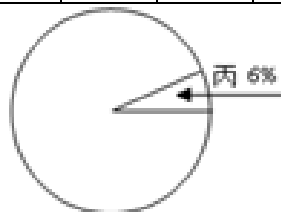


图 1 得票情况饼图

则该班的总人数为_____，通过计算可知，_____当选代表.

3. 小李向东走 2 千米，再向北走 3 千米，相应的位置变化用向量 $\vec{a} = (2, 3)$ 表示，如果小李向西走 1 千米，再向北走 2 千米，表示位置变化的向量 \vec{b} 为_____.

4.化简: $\overline{AB} + \overline{ABCD} =$ _____.

5.上海移动公司提供两种手机的月通话收费套餐,一种套餐的月租费为 8 元,一种套餐的月租费为 14 元,这两种套餐的通话费用 y (单位: 元) 与通话时间 x (单位: 分钟) 之间的函数关系如图 2 所示, 小陈根据图像得出如下结论:

- (1) 直线 l_1 描述的是月租费为 8 元的收费方式;
- (2) 直线 l_2 描述的是月租费为 14 元的收费方式;
- (3) 当每月的通话时长为 300 分钟时, 选择月租费为 14 元的收费方式更省钱.

其中正确结论的个数有_____.

- A.0 B.1 C.2 D.3

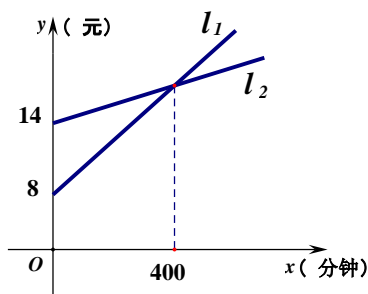


图 2

6.若函数 $f(x)$ 同时满足: (1) 对于定义域上的任意 x , 恒有 $f(x) + f(-x) = 0$; (2) 对于定义域内任意的 x_1, x_2 , 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 恒有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, 则称函数 $f(x)$ 为理想函数.

给出下列四个函数, 是理想函数的是_____.

- A. $f(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = x^3$ C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = \cos x$

7.河南洛阳龙门石窟是中国石刻艺术宝库, 现为世界非物质文化遗产之一. 某洞窟的浮雕共 8 层, 它们构成一幅优美的图案各层浮雕数成等比数列, 第二层浮雕数为 6, 第 5 层浮雕数为 48, 则第 8 层浮雕数为_____.

8. *Logistic* 模型是常用数学模型之一, 可用于流行病学领域. 现根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位: 天) 的 *Logistic* 模型: $I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}}$, 其中 K 为最大确诊病例数. 当 $I(t^*) = 0.95K$ 时, 标志着已初步遏制疫情, 则 t^* 约为_____.

(已知 $\ln 19 \approx 3$)

9. 已知圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$, 若直线 $l: y = x + m$ 与圆 C 相切, 则 m 的值是_____.

10. 如图 3 所示, 是为求 1 到 1000 的所有偶数的和而设计的一个程序框图, 则①②处应分别为_____、_____.

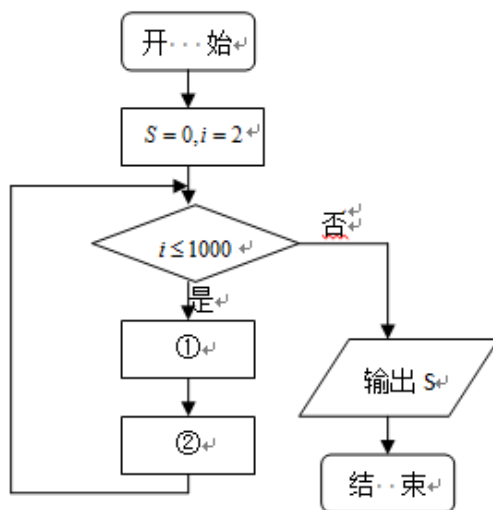


图 3

二、能力考查（本题满分 40 分，第 11 题 7 分，第 12 题 9 分，第 13, 14 题每题 10 分.）

11. 某公园的门票每张 30 元，15 人以上(含 15 人)的团体票八折优惠，那么不足 15 人时，怎样购票最省钱？

12.某集团公司今年产值 30 亿元，计划今后几年平均每年产值增长 8%.

(1) 试建立经过年限 x 与年产值 y 的函数关系式. (不必写出定义域)

(2) 问 5 年后产值可达到多少亿元?

(3) 多少年后能够达到年产值 50 亿元? (精确到年)

(4) 若该公司计划 5 年后要达到产值 50 亿元，平均年增长率应是多少? (精确到 1%)

13. 小河同侧有两个村庄 A , B 两村庄计划于河上建一水电站发电供两村使用, 已知 A , B 两村到河边的垂直距离分别为 $300m$ 和 $700m$, 且两村相距 $500m$, 问水电站建于何处时, 送电到两村用料最省?

14. 现有如下信息：

(1) 黄金分割比（简称：黄金比）是指把一条线段分割为两部分，较短部分与较长部分的长度之比等于较长部分与整体长度之比，其比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2) 黄金三角形被誉为最美三角形，是较短边与较长边之比为黄金比的等腰三角形.

(3) 有一个内角为 36° 的等腰三角形为黄金三角形.

根据上述信息，求 $\sin 126^\circ$.（提示：可能用到的公式 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ）

三、数学文化（本题满分40分，前两题每题8分，后两题每题12分.）

15. 我国古代数学著作《九章算术》有如下问题：今有金莢（chui）长五尺，斩本一尺，重四斤，斩末一尺，重二斤，问次一尺各重几何？意思是现在有一根金莢，一头粗，一头细，在粗的一端截下1尺，重4斤，在细的一端截下1尺，重2斤，金条由粗到细是均匀变化的，问依次每一尺各重多少斤？

16.高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号．设 $x \in \mathbb{R}$ ，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，我们称 $f(x)=[x]$ 为高斯函数．已知数列 $\{a_n\}$ ，满足 $a_1=1$ ，且 $(n+1)a_{n+1}-na_n=2n+1$ ，若 $b_n=[\lg a_n]$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_{2023} ．

17.苏格兰数学家纳皮尔在研究天文的过程中，找到了简化大数运算的有效工具，发明了对数，这是数学史上的大事件.他的朋友布里格斯构造了以 10 为底的常用对数 $\lg x$ ，并出版了常用对数表.瑞士数学家欧拉在 1770 年指出了“对数源于指数”.根据给出的参考数据和指对数间的关系.下列结论正确吗？请说明理由.

- (1) 4^{10} 在区间 $(10^6, 10^7)$ 内；
- (2) 2^{50} 是 15 位数；
- (3) 若 $3^{-20} = k \times 10^m$ ($1 \leq k < 10, m \in \mathbb{Z}$), 则 $m = 9$;
- (4) 若 m^{100} ($m \in \mathbb{N}^+$) 是一个 70 位正整数，则 $m = 5$;

参考数据如下表

x	2	3	5	7	11	13	17	19
$\lg x$ (近似值)	0.301	0.477	0.699	0.845	1.041	1.114	1.230	1.279

18.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：今有邹亮，下广三丈，茅四丈，无广；高一丈，问积几何？意思为：今有底面为矩形的屋脊状的楔体，下底面宽 3 丈，长 4 丈；上棱长 2 丈，高 1 丈，问它的体积是多少？已知 1 丈为 10 尺，现将该楔体的三视图给出，如图 4 所示，设网格小正方形的边长为 1 丈.

(1) 试画出该楔体的几何图形.

(2) 求该楔体的体积.

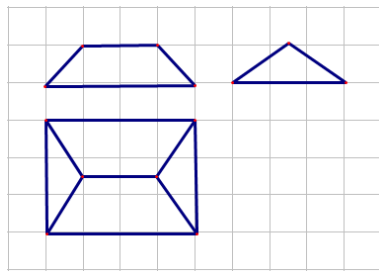


图 4

四、问题解决（本题满分 30 分.）

19. 汽车“定速巡航”技术是用于控制汽车的定速行驶，当汽车被设定为定速巡航状态时，电脑根据道路状况和汽车的行驶阻力自动控制供油量，使汽车始终保持在所设定的车速行驶，而无需司机操纵油门，从而减轻疲劳，促进安全，节省燃料.某汽车公司为测量某型号汽车定速巡航状态下的油耗情况，选择一段长度为 240km 的平坦高速路段进行测试.经多次测试得到一辆汽车每小时耗油量 F （单位： L ）与速度 v （单位： km/h ）（ $0 \leq v \leq 120$ ）的下列数据：

v	0	40	60	80	120
F	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{65}{8}$	10	20

为了描述汽车每小时耗油量与速度的关系，现有以下三种函数模型供选择：

$$F(v) = av^3 + bv^2 + cv, \quad F(v) = \left(\frac{1}{2}\right)^v + a, \quad F(v) = k \log_a v + b.$$

- (1) 请选出你认为最符合实际的函数模型，并求出相应的函数解析式.
- (2) 这辆车在该测试路段上以什么速度行驶才能使总耗油量最少？