2023年10月

ISSN 1005－6416
CN 12－1121/O1

中等数学

High-School Mathematics

TIANJIN · P.R.China 2023
ZHONGDENG SHUXUE

ISSN 1005-6416
10>
9 771005 641239

No. 5

天津市数学学会
天津师范大学
主办

目　次

中等数学

High-School Mathematics

2023年第5期（总第353期）

（2023年10月中旬出版）

编辑部主任　宋宝莹

编辑部电话　022－23542233

发行部电话　15822631163

E-mail　zdsxlx@163.com

期刊基本参数：CN 12－1121/O1＊1982＊b＊16＊64＊zh＊P＊￥10.00＊9000＊13＊2023－10

关注结构化教学 促进素养再建构
——以“一次函数、一元一次方程和一元一次不等式”教学为例

刘 茜[1] 薛 莺[2]

（1. 江苏省江阴市敔山湾实验学校，214437 2. 江苏省无锡市东绛实验学校，214121）

摘要： 结构化教学可以将零碎的知识点进行横纵联系，从而形成完整的结构化体系，加强学生认知和教学内容的关联性．一次函数、一元一次方程和一元一次不等式是三个不同的数学模型，从三者的联系出发，关注本质的结构化生成，建构认知关联；创设递进的结构化问题，促进深度学习；设计开放的结构化活动，提升核心素养．

关键词： 结构化教学；深度学习；核心素养

中图分类号： G451 **文献标识码：** A **文章编号：** 1005-6416(2023)05-0021-05

引用格式： 刘茜，薛莺．关注结构化教学 促进素养再建构——以“一次函数、一元一次方程和一元一次不等式”教学为例 [J]．中等数学，2023(5)：21-25．

1 引言

结构化教学是从学生已有认知经验和思维特点出发，通过问题驱动、活动探究等方式引导学生自主建构知识和方法结构，形成思维结构，生成素养结构的教学[1]．《义务教育数学课程标准（2022 版）》（以下简称“《课标》”）指出数学教学要对课程内容进行结构化整合，帮助学生学会用整体的、联系的、发展的眼光看问题，形成科学的思维习惯，发展核心素养[2]．这就要求我们不仅要整体把握教学内容间的关联性、关注结构化教学，更要把握教学内容和核心素养间的关联．

笔者有幸参加了江苏省无锡市青年教师评优课的比赛，课题是《一次函数、一元一次方程和一元一次不等式》，本节课着眼于用数学的思维分析一次函数、一元一次方程和一元一次不等式之间的联系，引导学生经历发现、提出、分析、解决问题的过程，自主建构知识和方法的框架结构，不断完善学生的已有知识体系，形成整体认知框架．文章从创设情境、互动探究、方法提炼、知识巩固、小结提升这五个环节来阐述结构化教学的全过程，通过对该课的分析，谈谈对结构化教学的思考．

2 教学分析

2.1 教材分析

“一次函数、一元一次方程和一元一次不等式”是苏科版教材八年级上册第六章《一次函数》第 6 节的内容[3]，是首次将这

收稿日期：2023-03-09 修回日期：2023-08-11

基金项目：江苏省教育科学“十四五”规划课题——基于学生认知发展的初中数学结构化教学实践研究（D/2021/02/688）的阶段性成果；无锡市“十四五”教育科研 2022 年度立项课题——基于数学核心能力的初中数学建模教学研究（XH2022313）的阶段性成果

作者简介：刘茜（1988— ），女，江苏江阴人，中学一级教师，主要从事数学课堂教学研究．

三个数学模型建立关联性的课时，这三个数学模型都是刻画现实世界数量关系的：函数刻画的是数量的变化关系，方程和不等式则是刻画变化过程中的确定关系——等量关系和不等关系．因此，方程和不等式可以看成是函数变化过程中的特殊情况，函数则是方程和不等式的延伸．另外，本节课的学习对后续研究其他函数和方程、不等式间的联系提供了研究路径和方法，积累了活动经验．

2.2 学情分析

学生已经学习了一元一次方程、一元一次不等式和一次函数，但并没有对三者的联系进行研究．按照《课标》的要求，要重视对教学内容的整体性分析，帮助学生建立体现数学本质、对后续学习有意义的结构化的知识体系．因此，在教学时要有整体结构意识，立足整体角度，引导学生认识知识结构的多维关联，促使学生的思维结构化、系统化，从而提升高阶思维能力．通过前面的学习，学生会用方程、不等式和函数的方法解决问题，但是这三者间的联系学生很难自主发现，尤其是无法准确地读图，找不到突破口．承接后面的学习，通过此节内容的教学发展学生“联系的观点”将代数的核心知识（函数、方程、不等式）三位一体，为高中阶段函数、方程、不等式的学习做铺垫．针对上述难点，笔者从学生的认知出发，从特殊到一般，在内容和方法上研究方程与函数和不等式与函数的关联，进一步加强学生对数形结合和转化思想的应用．

3 教学过程

3.1 创设生活情境，引发结构化感悟

老师开车来梅里中学的中途去加油站加油，到达加油站时油箱里还有 5 L 油，加油枪流量为 25 L/min.

（1）写出油箱的油量 y(L) 与加油的时间 x(min) 之间的函数表达式；

（2）若油箱的最大容量为 55 L，你能得到哪些信息？

设计意图：让学生经历从实际问题抽象到数学问题的过程，从“数”的角度，利用方程或不等式得到加油时间的最大值，再联系到函数图像，从“形”的角度，借助图像上相应的点来确定时间的最大值．通过方程、不等式、函数图像三个不同的角度去解决问题的过程中，让学生初步体会这三者之间是存在关联的，从而激活学生的思维，提出问题，对三者的具体联系进行深入研究．

3.2 深度互动探究，生成结构化知识

常规性探究：对于 $y=2x+4$ 这个函数，你会求什么？（交点坐标）

追问 1：你是如何求函数图像与 x 轴交点的？

追问 2：方程 $2x+4=0$ 的解与交点的坐标有什么关系？

追问 3：若 $y>0$，你又可以得到什么？（不等式）

追问 4：如何在图像上找到不等式 $2x+4>0$ 的解集？

追问 5：若 $y>0$，你能得到相应的 x 的取值范围吗？这是哪个不等式的解集？

设计意图：该问题从学生的认知点出发，以具体问题解决为抓手，在求与 x 轴交点的过程中，根据函数值建立一元一次方程的解和相应的函数图像之间的关联，方程的解即是相应点的横坐标．以方程为突破口，找到关键点，把方程看成是不等式的临界状态，再根据函数值的取值范围找到相应的函

数图像,从而确定相应的横坐标的取值范围,即是不等式的解集.在研究的过程中,遵循学生的认知发展规律,通过一系列问题串,逐步形成了研究三者关系的一般路径,逐步完善学生的认知结构,为学生研究与 y 轴的交点提供思路,同时培养学生识图、读图能力.

特殊化探索:类比上述研究路径,根据函数 $y=2x+4$ 与 y 轴的交点,写出一些方程或不等式,并研究方程、不等式和函数图像的联系.

学生的研究结果呈现两类:一类是给出 x 的取值或取值范围,研究 y 的取值或取值范围;一类是给出 y 的取值或取值范围,研究 x 的取值或取值范围.

设计意图:通过类比之前的研究路径,学生会产生两种研究思路:一种是在求与 y 轴交点的过程中,确定 x 求 y,这是由学生的思维模式所产生的结果;另一种是在前面路径中得到启发,确定 y 求 x.这两种结果都是符合学生思维逻辑的,自主生成的,让学生感受到只要函数中的任意一个变量确定,另一个变量也随之确定.在活动的探究中,充分激发学生思维的灵活性,抓住知识生长点,将解方程和不等式转化为研究一次函数图像,通过数形结合的思想方法,得到方程和不等式的解,并进一步优化知识结构,将前面的研究经验应用到新的研究方向,增强学生的应用意识,培养学生的几何直观.

优化式总结:若给出 $2x+4=5$ 这个方程,你会选择哪种方法得到方程的解?一次函数 $y=kx+b$ 的图像如图 1,你能说出 $kx+b=2$,$kx+b\leqslant 2$ 的解吗?

追问:你更愿意用什么方法解决问题?

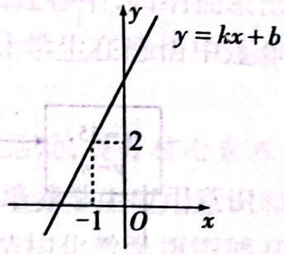

图 1

设计意图:"数"和"形"两种方法都能得到方程或不等式的解,有时候直接求解更为便捷,有时候借助图像更为直观.让学生在解决问题的过程中感受不同方法在不同情况下的优势,学会分析并选择适合的方法.优化式总结环节让学生经历从特殊到一般的过程,学会从特殊情况中汲取经验,迁移到一般情况,感受研究的路径、思想方法和内容的一致性,进一步强化一次函数、一元一次方程和一元一次不等式的关联.

3.3 思想方法推广,提炼结构化策略

一般化推广:你能说说一次函数 $y=kx+b$ 与方程 $kx+b=n$、不等式 $kx+b>n$(或 $kx+b<n$)之间的联系吗?

思考方向:如图 2,找到函数图像上的关键点,该点的横坐标即为方程的解,过该点作平行于 x 轴的直线,判断不等式对应的函数图像是直线上方还是下方,最终由横坐标的范围确定不等式的解集.

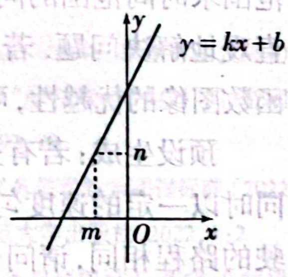

图 2

设计意图:学生抓住思维的生长点,从研究具体函数的经验中抽象出一般方法,感受从"式"的特征比较到"形"的观察的便利性和必要性,体会数形结合思想的重要性.教师在学生提炼的方法中,归纳出更一般的结论,并带领学生进一步完善知识、方法的框架结构(如图 3),培养学生的抽象能力和归纳能力,增强学生的结构化意识.

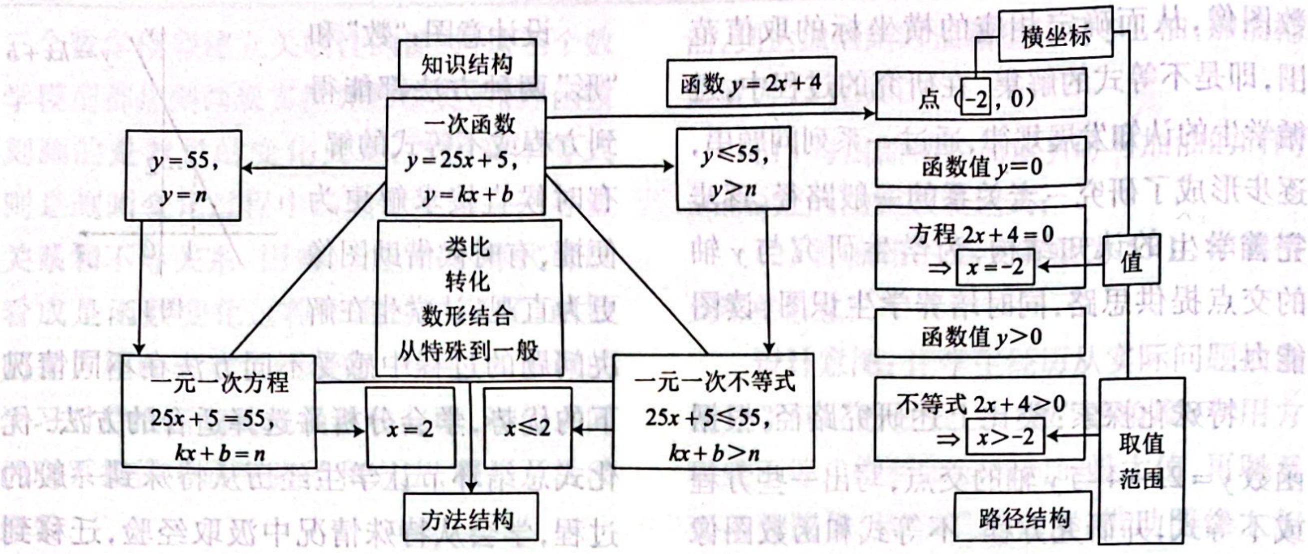

图3

3.4 体验探索过程,迁移结构化应用

迁移式应用:老师开车行驶 10 km 后驶入高速公路,并以 100 km/h 的速度匀速行驶了 x h. 试根据上述情境,提出一些问题,并用一次函数、一元一次方程或一元一次不等式求解.

思考方向:通过问题情境建立一次函数模型,设置已知行程求时间的问题,已知行程范围求时间范围的问题,等等,借助函数图像直观地解决问题. 若是这些问题还无法体现函数图像的优越性,可以设置以下预设问题.

预设生成:若有另一辆车行驶 30 km 后,同时以一定的速度匀速行驶,0.4 h 后两车行驶的路程相同,请问何时老师开车行驶的路程大于另一辆车行驶的路程?

设计意图:通过小组合作,学生自主编题,设计有关行程的问题,跳出原有的思维定式,会用新学的知识和方法将方程、不等式和函数相关联,通过发现、提出、分析和解决问题,培养学生的应用意识和创新意识. 在学生提出问题的基础上,进一步深入研究,追溯到上节课研究的两个一次函数图像的交点问题,发现可以从新的角度,用新的学习经验去解决,还可以补充上述预设问题,借助函数从“形”的角度能直观地得到行驶路程的大小关系,在巩固知识的同时,又将方法进行迁移应用,将认知结构和前面所学的内容关联,发展横向思维.

3.5 学科素养建构,形成结构化认知

(1) 本节课你学到了哪些知识?

(2) 研究的过程和思想方法是怎样的?

(3) 运用今天的学习经验今后还可以研究什么内容?

设计意图:通过问题 (1)(2),让学生经历知识、方法和路径的再建构,培养学生的总结概括能力,通过问题 (3) 激发学生的探索欲,引起学生思考,为今后研究其他函数、方程和不等式的联系留下了足迹,不仅可以提升学生的思维品质,还可以让学生的认知框架更完整、更系统.

4 教学思考

4.1 关注本质的结构化生成,建构认知关联

布鲁纳曾说过:“学习就是认知结构的组织和重新组织,学习结构就是学习事物是如何联系的”. 由此可见结构化教学的重要性,但是,结构化教学的重点不在于结构的给出,而在于结构的生成,学生在认知结构不断完善和系统化的过程中,才能深入地了解结构

的本质关联.本节课从学生已有的认识经验出发,通过类比教学,将函数图像上不同点的研究路径与方法同化并迁移,经历从特殊到一般的研究过程,借助函数图像将函数、方程、不等式结构化关联,让学生理解三者之间的关系,任何一个方程都可以表示为 $f(x)=0$ 的形式,任何一个不等式也都可以表示为 $f(x)>0$(或"<""≤""≥")的形式,其中 $f(x)$ 就是一个函数,而且方程、不等式的归类就取决于函数的归类[4].这样就将前面所学的方程和不等式章节很好地和函数建立了联系,完善了学生的结构化思维,建构了认知关联.通过这节课的学习学生深刻体会解决方程和不等式的问题除了从"数"的角度去解决,还可以借助函数图像,从"形"的角度去解决,深化"数形"结合思想的应用.通过整体与部分的研究,从学生的最近发展区出发揭示变化与确定的关系,从而得到这三个数学模型之间三维一体的关联本质,优化学生的素养结构[5].

4.2 创设递进的结构化问题,促进深度学习

结构化问题可以体现知识的关联性、方法的迁移性,使课堂结构更完整,环节设计更有效[6].本节课在探究一元一次方程、一元一次不等式和一次函数的关联时,通过设置递进式"问题串",从方程的解和函数图像的联系再到不等式的解和函数图像的联系,将知识进行关联;从"数"到"形",从特殊到一般,将方法进行迁移,由浅入深,层层递进,让联系的观点逐渐经验化、理性化、科学化,再适时地追问,引导学生辨析自省,会选择合适的方法去解决问题,引发学生的深度探究,促进学生深度学习.通过设置有效的递进式"问题串",可以高效地驱动学生思考,引导学生在结构化问题中自主建构认知体系,将独立的知识点有机整合,让学生体会知识的整体性和系统性,在方法的迁移中,归纳抽象出一般方法或一般路径,让学生在感悟中逐步形成结构性思维[7].

4.3 设计开放的结构化活动,提升核心素养

设计开放式活动是培养学生应用意识和创新意识的有效途径,结构化教学更需要开放式活动来提升学生的思维能力.本节课设计了两个开放式活动:第一个是在学生已有经验基础上,设计利用函数与 y 轴的交点去探究函数、方程、不等式的关系,这是横向思维的拓展,将探究与 x 轴交点的经验迁移到探究活动中,让学生初步学会用联系的眼光看待这三者的关系;第二个是在抽象出知识结构、方法结构和路径结构之后对生活实际问题的应用,在此活动中,让学生从"静"态教学中"动"起来,通过解读、设计、解决问题的全过程,更深层次的挖掘三者间的联系,巩固认知结构,增强学生的应用能力,激发学生的创造力,从而提升数学核心素养.

参考文献:

[1] 陈静安,伍海盈,张然然.运用结构化教学方法发展初中生数学核心素养——以"绝对值(1)"为例[J].数理天地(初中版),2023(4):93-95.

[2] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022,4:2.

[3] 杨裕前,董林伟 主编.义务教育教科书 数学 八年级上册[M].南京:江苏凤凰科学技术出版社,2016,6:163-165.

[4] 孙朝仁,朱桂凤.以"学"为中心的教学设计的哲学考量——以"一次函数、一元一次方程和一元一次不等式"为例[J].中学数学月刊,2015(11):24-27.

[5] 朱一多,朱小平.聚焦深度学习 优化结构教学[J].中学数学教学参考,2022(26):9-11.

[6] 赵红琴."生长数学"理念下的结构化教学——"反比例函数单元复习课"的教学设计与思考[J].中学数学,2023(2):3-5.

[7] 林青松.精心创设"问题串"促进学生深度学习[J].中学课程资源,2022(9):5-6.

心，$R=OA$，$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle ABD=\angle CBE$，$EF\perp CB$ 于点 F，$DH\perp BA$ 于点 H，$DG\perp CA$ 于点 G. 求证：$OD^2=R^2-2R\dfrac{DH\cdot DG}{EF}$.

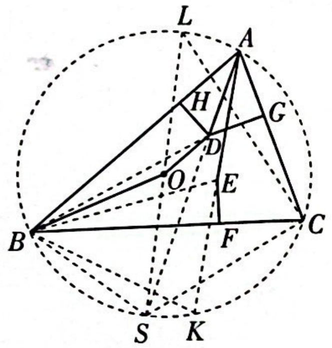

图 3

证明 如图 3，作出 $\odot O$，设 AD、AE 分别交 $\odot O$ 于点 S、K，SL 为 $\odot O$ 的直径.

则 $SK\parallel BC$，$\triangle BDH\backsim\triangle BEF$，

$\triangle ADG\backsim\triangle LSC$.

由 $OD^2=R^2-2R\dfrac{DH\cdot DG}{EF}$

$$2R\frac{DH\cdot DG}{EF}=R^2-OD^2$$

$$\Leftrightarrow 2R\frac{DH\cdot DG}{EF}=AD\cdot DS\ \text{（圆幂定理）}$$

$$\Leftrightarrow 2R\frac{DH}{EF}\cdot\frac{DG}{AD}=DS$$

$$\Leftrightarrow 2R\frac{DB}{EB}\cdot\frac{SC}{2R}=DS$$

$$\Leftrightarrow \frac{DB}{EB}=\frac{DS}{SC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{DB}{EB}=\frac{DS}{KB}. \qquad ①$$

由 $\angle BSD=\angle BKE$ 知

式① $\Leftrightarrow\triangle SBD\backsim\triangle KEB$

$\Leftrightarrow\angle SBD=\angle KEB$

$\Leftrightarrow\angle SBC+\angle DBC=\angle KAB+\angle ABE$.

而 $\angle SBC=\angle SAC=\angle KAB$，$\angle DBC=\angle ABE$，此即为已知，故结论成立.

（金磊　西安交通大学附属中学，710054）

高 808 如图 4，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，点 D 在线段 BC 上. 过 B、D、I 三点作圆 Γ_1，过 C、D、I 三点作圆 Γ_2. 直线 AD 与 Γ_1、Γ_2 的第二个交点为 E、F. 点 P、Q 分别在 Γ_1、Γ_2 上，且满足 $BP\parallel CQ\parallel AD$. 直线 EP 与 AC 交于点 X，直线 FQ 与 AB 交于点 Y. 求证：X、Y、I 三点共线.

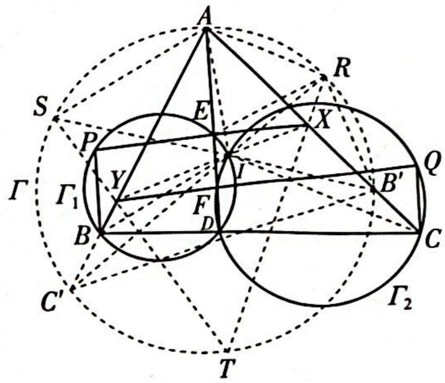

图 4

证明 如图 4，设 B、C 关于直线 AI 的轴对称点分别是 B'、C'. 则 I 也是 $\triangle AB'C'$ 的内心.

作 $\triangle AB'C'$ 的外接圆 Γ. 延长 $C'I$、$B'I$，分别交圆 Γ 于点 R、S.

注意到，$\angle IED=\angle IBD=\angle ABI=\angle AB'I$，故 A、E、I、B' 四点共圆.

由熟知的结论得 $AR=IR=B'R$.

则 R 是 A、E、I、B' 四点所共之圆的圆心.

故 $\angle ARE=2\angle AIE=2\angle IED-2\angle EAI$

$=2\angle IBD-2\angle EAI$

$=\angle ABD+\angle EAB-\angle EAC$

$=\angle ADC-\angle EAC=\angle AEP-\angle EAC$

$=\angle AXE$.

从而，A、E、X、R 四点共圆.

类似地，A、F、Y、S 四点共圆.

设直线 RX 与 SY 交于点 T.

则 $\angle ART+\angle AST=\angle AEP+\angle AFQ$

$=\angle PBD+\angle QCD=180°$.

因此，A、R、S、T 四点共圆，即点 T 也在圆 Γ 上.

故对圆 Γ 上的六点形 $AC'RTSB'$，由 Pascal 定理，知 X、Y、I 三点共线.

（金春来　广东省深圳中学，518001）