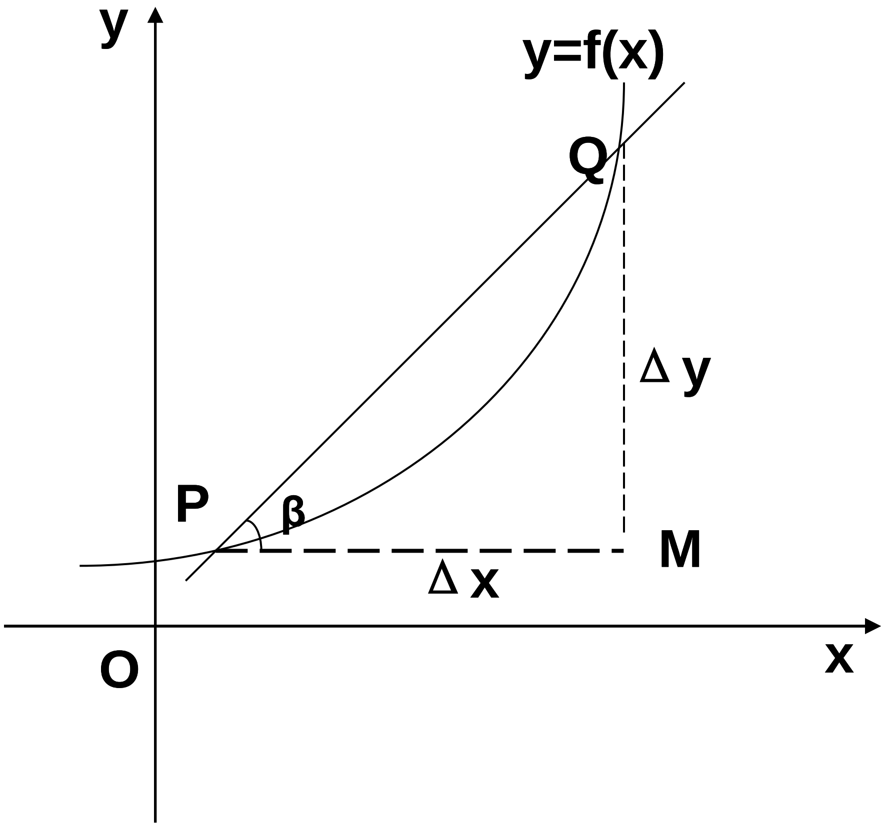
导数的应用

江苏省江阴中等专业学校 崔永红

一、主要知识点

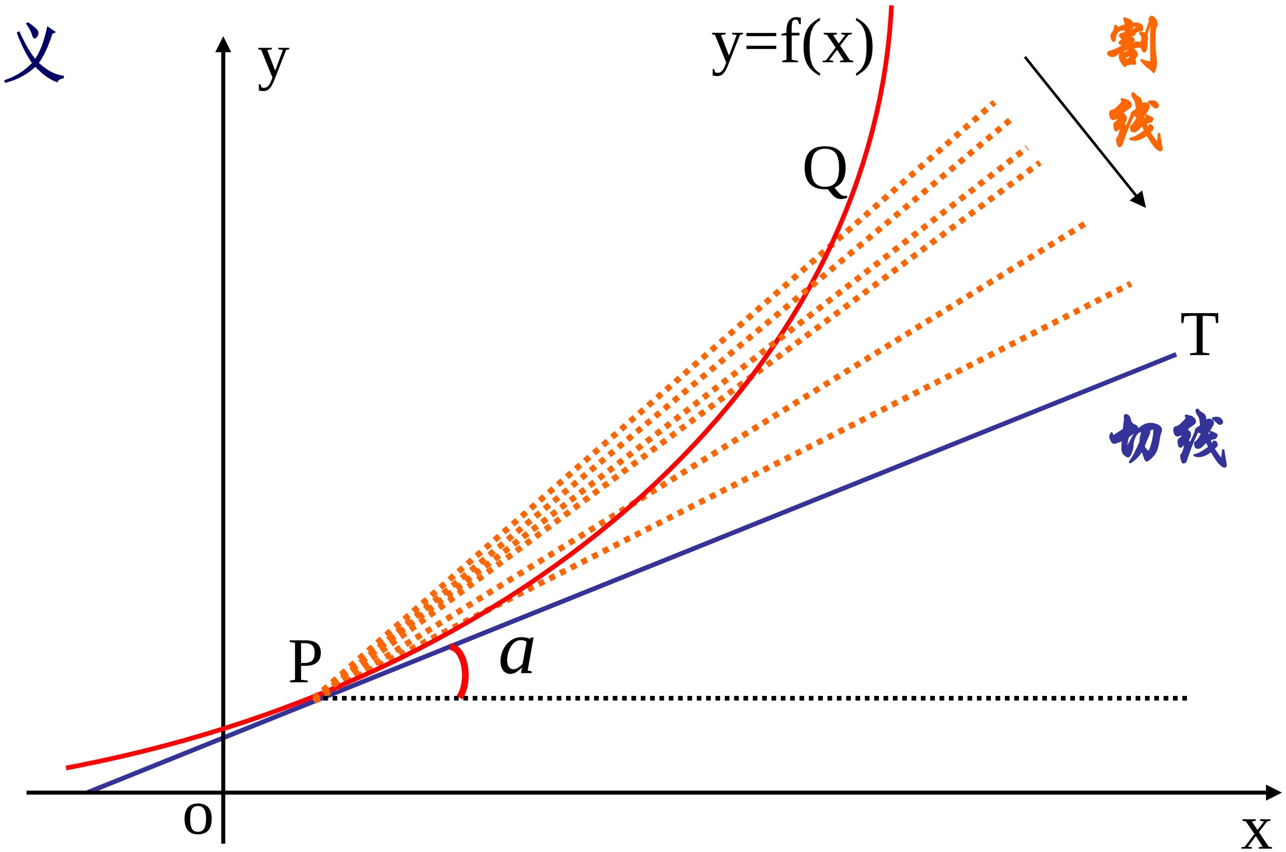
1、如图,曲线C是函数$y=f(x)$的图象,$P(x_0,y_0)$是曲线C上的任意点,$Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$为P邻近一点,PQ为C的割线,PM//x轴,QM//y轴,β为PQ的倾斜角。$\tan\beta=\Delta y/\Delta x$为PQ的斜率



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$ 为在x_0处的导数

2、导数的几何意义

请看：当Q沿着曲线逐渐向点P接近时，割线PQ绕着点P逐渐转动的情况。 β 为PQ的倾斜角。



当点Q沿曲线无限接近点P，即Δx→0时，割线PQ有一个极限位置PT—切线。

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\tan\beta=\lim_{\beta\to a}\tan\beta=\tan a=k$$

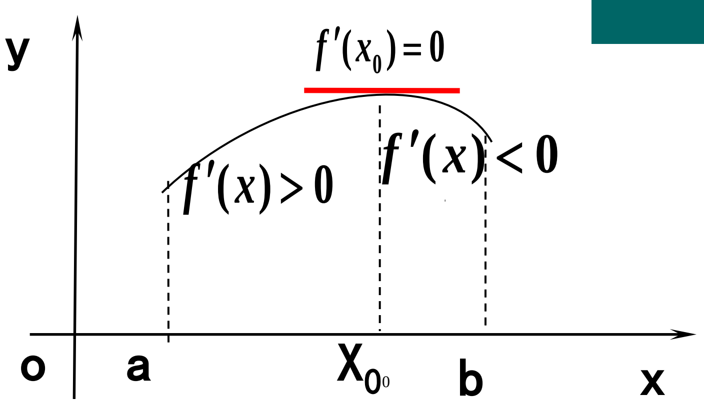
函数y=f(x)在x_0处的导数就是函数表示的曲线在该点的切线的斜率。

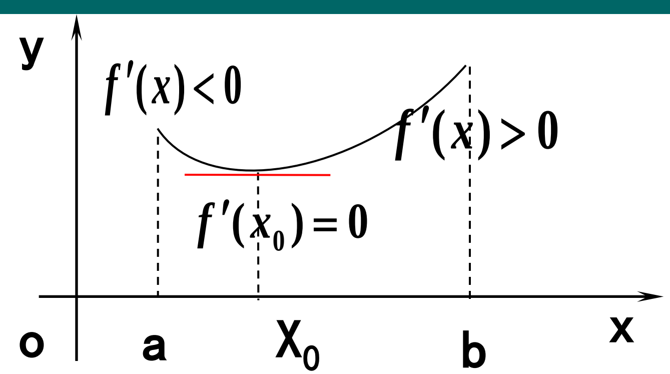
3、函数的单调性

（1）求定义域;
（2）求f′(x);
（3）解不等式f′(x)＞0（或f′(x)＜0）；
（4）确认并指出递增区间（或递减区间）。

4、函数的极值

（1）求定义域;
（2）求导数f′(x);
（3）求方程f′(x)=0的全部实根;
（4）检查f′(x)在方程f′(x)=0的根左右两侧的值的符号，如果左正右负，那么f（x）在这个 根处取得极大值；如果左负右正，那么f（x）在这个根处取得极小值。



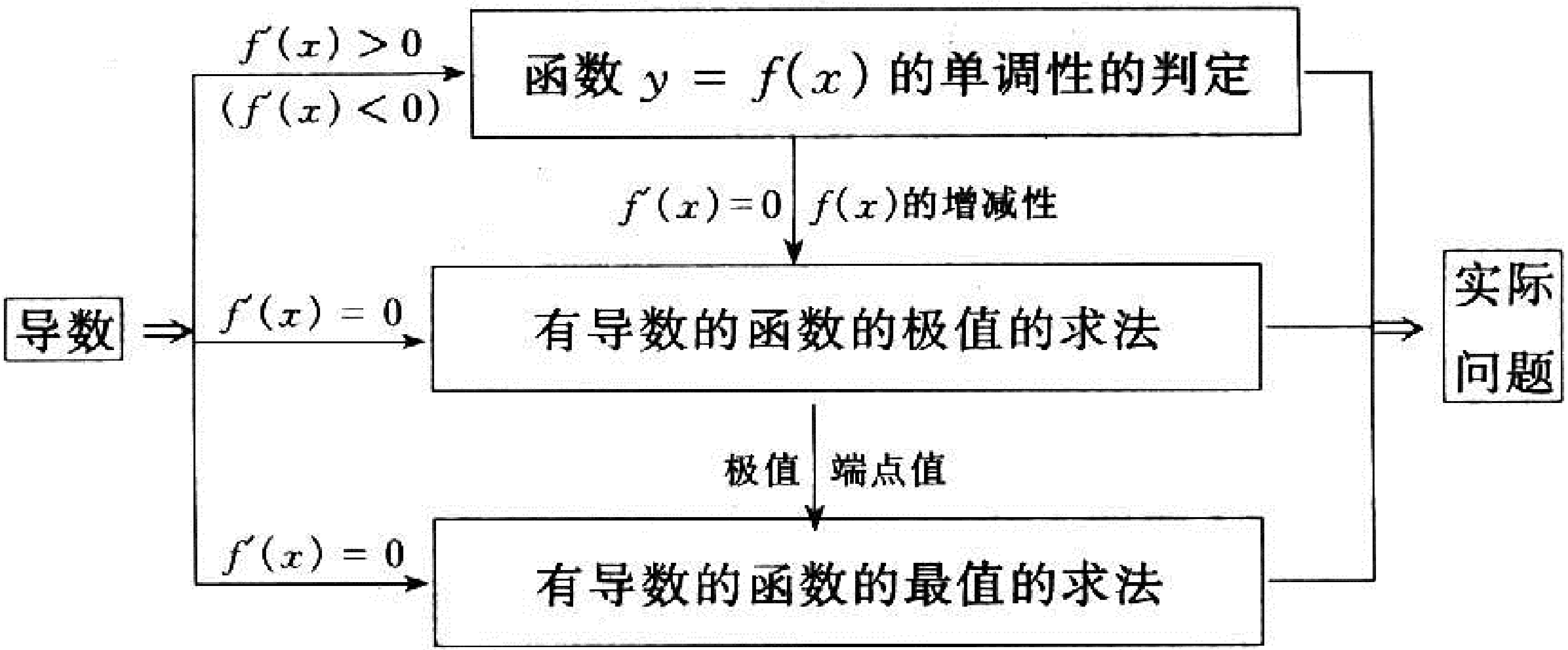


5、函数的最值

设y=f（x）在[a，b]上有定义，在(a，b)内有导数，求f（x）在[a，b]上的最大值和最小值的步骤：

i）求f（x）在（a，b）内的极值；

ii）将f（x）的各极值与f（a）、f（b）比较，确定f（x）的最大值与最小值。



二、基础训练

1、曲线$y=x^2-2$在点P(1,-1)处的切线的斜率为(　　)

2、已知函数$y=2x^3-9x^2+12x-3$,

（1）求它的单调区间；

（2）求它的极值；

（3）求它在[0，3]上的最值。

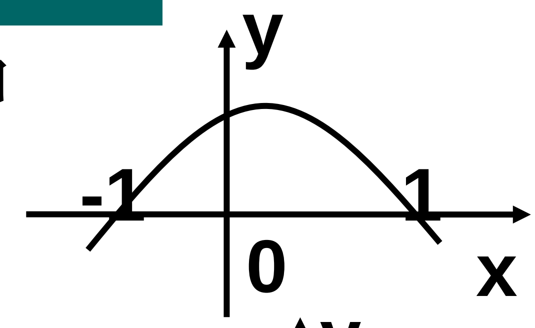
3、判断对错：

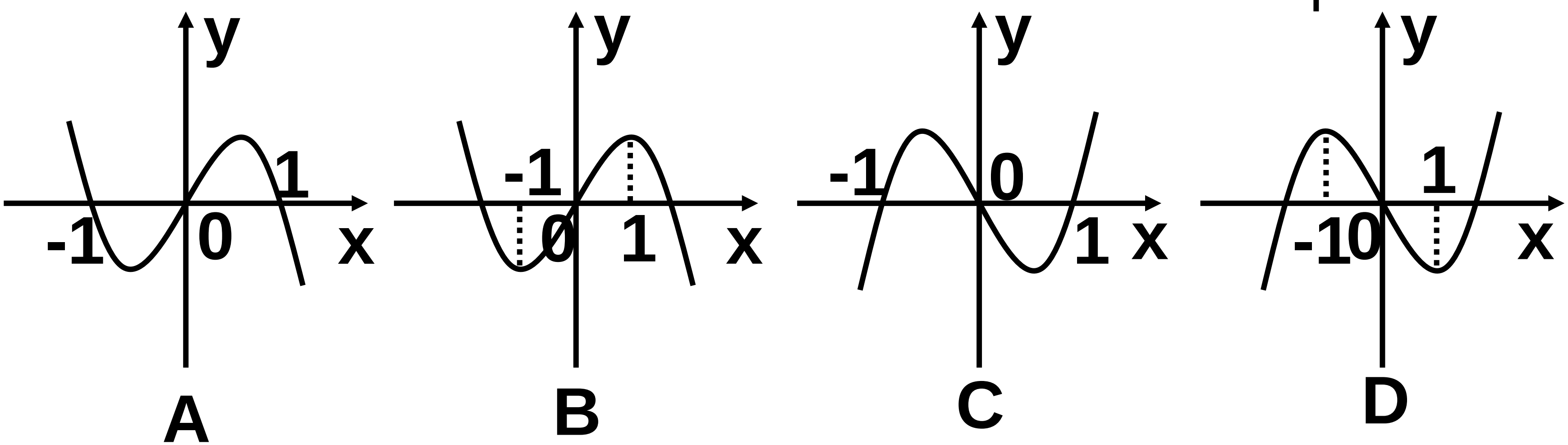
（1）若$f'(x_0)=0$，则函数f(x) 在x_0处取得极值。

（2）若函数f(x)在x_0处取得极值，则f(x)在x_0处可导。

4、设f’(x)是函数f(x)导数，y=f’(x)图象如图甲，则f(x)的图象最可能是：

甲





5、若区间[a,b]内有f’(x)>0,且f(a)>0,则（a,b）内有

A、f(x)>0 B 、f(x)<0 C、f(x)=0 D、不能确定

三、典型习题分析

已知$f(x)=ax^5-bx^3+c$在$x=\pm 1$处有极值，且极大值为4，极小值为0．试确定a、b、c的值．

解：$f'(x)=5ax^4-3bx^2=x^2(5ax^2-3b).$

由题意，$f'(x)=0$ 应有根 $x=\pm 1$，故5a=3b，于是：

$$f'(x)=5ax^2(x^2-1).$$

(1)设a>0，列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	--	0	--	0	+
f(x)	↗	极大值	↘		↘	极小值	↗

由表可得$\begin{cases}4=f(-1)\\0=f(1)\end{cases}$，即$\begin{cases}-a+b+c=4\\a-b+c=0\end{cases}$.

又5a=3b，解得a=3，b=5，c=2.

(2)设a<0，列表如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	--	0	+	0	+	0	--
f(x)	↘	极小值	↗		↗	极大值	↘

由表可得$\begin{cases}4=f(1)\\0=f(-1)\end{cases}$,即$\begin{cases}a-b+c=4\\-a+b+c=0\end{cases}$.

又5a=3b，解得a=-3，b=-5，c=2.

综上，得： a=3，b=5，c=2；

或a=-3，b=-5，c=2.

四、思考题：

A层练习题：

已知a为实数，$f(x)=(x^2+3)(x-a)$

（Ⅰ）求导数 $f'(x)$；

（Ⅱ）若 $f'(-1)=0$ ，求 $f(x)$在[-2，2]上的最大值和最小值；

（Ⅲ）若 $f(x)$在实数集R上都是递增的，求a的取值范围。

$f'(x)=3x^2-2ax+3$

B层练习题：

$a=3, y_{max}=-7, y_{min}=-35$

求f(x)=x/2-ln(1+x)+1的单调区间。

－3≤a≤3

求f(x)=x/2-ln(1+x)+1的单调区间。

解:函数的定义域是(-1,+∞), $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{2(1+x)}$.

由$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x+1>0 \end{cases}$即$\begin{cases} \frac{x-1}{2(1+x)}>0 \\ x>-1 \end{cases}$, **解得x>1.**

故f(x)的递增区间是(1,+∞);

由$\begin{cases} f'(x)<0 \\ x+1>0 \end{cases}$**解得-1<x<1,故f(x)的递减区间是(-1,1).**

注:函数的单调区间必定是定义域的子区间,故求函数的单调区间首先要确定函数的定义域,求出使导数的值为正或负的x的范围时,要与定义域求两者的交集.

五、规律与方法

1、在利用导数讨论函数的单调区间时，首先要确定函数的定义域，解决问题的过程中，只能在函数的定义域内，通过讨论导数的符号来判断函数的单调区间。

2、注重等价转化、分类讨论、数形结合思想的综合应用。

3、利用导数来研究函数．主要是研究函数的增减性、函数的极大（小）值、函数的最大(小)值以及一些与实际相关的问题。

六、课外作业

1、导学第147页课外习题

2、(开放题) 已知$y=x^3+ax^2+bx+c$，

（1）试确定该函数的图象有与x轴平行的切线的条件；

（2）试确定该函数在 R上是增函数的条件；

（3）试确定该函数存在极值的条件。


感谢莅临指导!