

让数学理解在结构化教学中落地生根 ——四年级下册“思考题”教学经历和思考

汪丹 四数

摘要：数学教学中，常会出现学生对一些知识点无法融会贯通的现象，其实就是学生没有达成数学理解的表现。实现数学理解有多种途径，本文从一道思考题谈起，以整数乘法的结构化教学为例，论如何有效实施结构化教学，促进学生数学理解的达成。

关键词：数学理解 结构化教学 乘法

一、引言

在数学教学中，常常会出现新课教学时，学生理解当时的知识点，也会做课堂的作业，但是经过一段时间再做或者将知识综合起来，学生就会忘记一些知识点，更加不能灵活运用这些知识来完成一些较复杂的题目。需要老师“炒冷饭”来帮助学生回忆，其实这就是学生没有达成数学理解的表现。古往今来，一切教育理论研究都指向，在数学学习中要提升学生的数学理解，只有真正理解了数学知识，学生才能灵活地运用数学知识。而要达成数学理解，除了要探寻知识的本质，另一个很重要的一个因素是形成数学知识之间的联系，《新课标》也明确指出，数学教学要让学生“体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系。”“体会数学知识之间的联系”就是让相关是数学知识结构化，当学生接受的是结构化的教学方式，那么学生将会从整体上理解数学知识，就会大幅度提高学生“融会贯通”的本领。下面将从四年级下册的一道思考题出发，谈谈笔者的教学经历和思考。

二、研究缘起



用0、1、2、3、4这五个数字组成一个两位数和一个三位数，要使乘积最大，应是哪两个数？要使乘积最小呢？

换五个数字，再试一试。



笔者教过好几轮三四年级，每次教学该题时，都有同样的感觉，就是过程曲折，结果却不令人满意。教学用书上，该题的目标是：该思考题可以引导学生运用尝试与调整的策略答案，还可以让学生再写五个不同的数字，组成三位数乘两位数的算式，找到最大和最小的乘积。

纵观学生的学习历程，该题已不是学生第一次遇到积最大和积最小的情况。

(1)在三年级上册三位数乘一位数时学生书上也有这样一道类似思考题，找到三位数乘一位数积最大和积最小。



把2、3、5、7四个数字分别填入□里，写成乘法算式。

(1) 要使积最大，应该怎样填？ $\boxed{5}\boxed{3}\boxed{2} \times \boxed{7}$

(2) 要使积最小，应该怎样填？ $\boxed{3}\boxed{5}\boxed{7} \times \boxed{2}$

(2) 三年年级下册时学习两位数乘两位数，虽然书上没有要求，但在练习中扩充了两位数乘两位数乘积最大和最小的题目。例：1、2、3、4 这四个数字组成两位数乘两位数，要使乘积最大是？要使乘积最小是？

1、第一轮教学——计算法

笔者在第一轮教学时经历了以下三个阶段

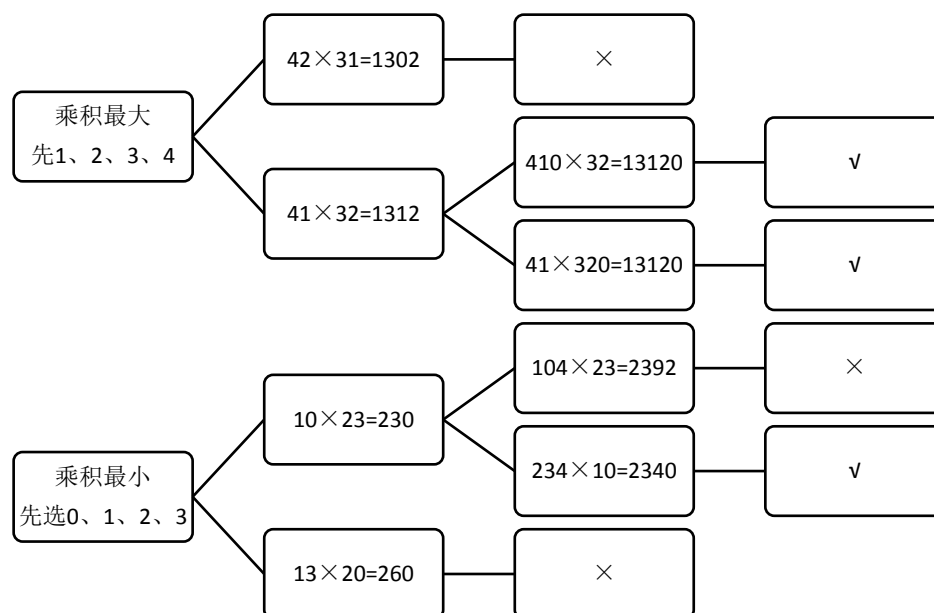
(1) 三年级上册三位数乘一位数这道思考题，明确根据乘积最大和乘积最小能确定两个乘数的首位。以 1、2、3、4 为例，乘积最大那么首位一定是 3 和 4，乘积最小那么首位一定是 1 和 2。

(2) 三年级下册两位数乘两位数也是先确定首位，再用另外两个数字进行配搭，再进行计算，找到乘积最大和乘积最小。以 1、2、3、4 为例，乘积最大 41×32 和 42×31 进行计算比较得到结果是 41×32 ，乘积最小 13×24 和 14×23 进行计算比较得到结果 13×24 。

(3) 四年级下册三位数乘两位数，是在三年级下册两位数乘两位数的基础上加一个数字。以 0、1、2、3、4 为例：

①乘积最大：先用 1、2、3、4 这四个数字确定乘积最大的两位数乘两位数即 41×32 ，再在两位数后面添 0，经过计算得出 410×32 和 41×320 得数相等，所以两个算式都可以。

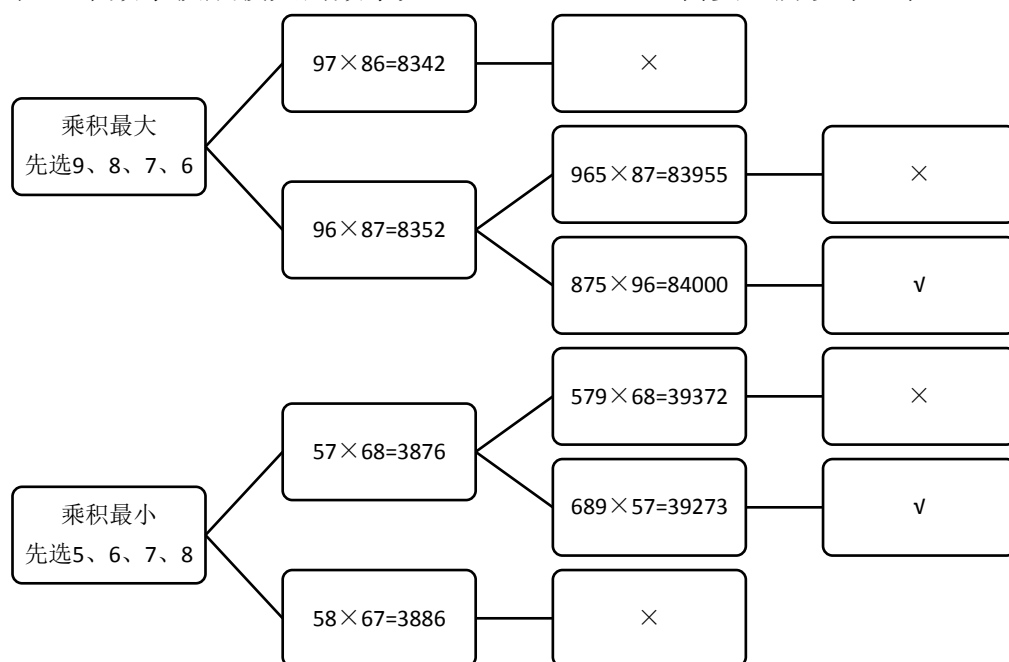
②乘积最小：先用 0、1、2、3 这四个数字确定乘积最大的两位数乘两位数即 10×23 ，再在两位数后面添 4，计算 104×23 和 10×234 的结果并比较得出乘积最小的算式是 10 乘 234。



本以为这样的教学过程将这一类型的题目串联起来形成阶梯式，让学生的思维螺旋式上升，应该教学效果显著，但是学生的做题的情况却差强人意。经过调查发现主要错误原因有两个：

第一、乘积最小，学生误以为是 1、2、3、4 组成最小的两位数乘两位数即 13×24 ，然后再添数字 0，与乘积最大的方法混淆。

第二、把五个数字换成较大的数字如 5、6、7、8、9，需要经历以下过程：



该题计算量太大，学生容易算错，得到了结果在比较大小的时候也容易弄错，而且在该题上画太多时间，造成学生的抵触心理，所以鲜有成效。

2、第二轮教学——排位法

基于以上的原因，笔者总结经验，在第二轮教学时进行了调整。四年级下册教学时，从 1、2、3、4、5 这五个没有 0 的数字着手教学，得到乘积最大为 52×431 ，乘积最小为 13×245 ，再换别的数字进行练习，多次练习后发现数字的排位规律：

当乘积最大时，将五个数字从大到小排列，按照序号填入相应的位置

$$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \textcircled{1} & \textcircled{4} \end{array} \times \begin{array}{cc} \square & \square & \square \\ \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{5} \end{array}$$

当乘积最小时，将五个数字从小到大排列，按照序号填入相应的位置

$$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \textcircled{1} & \textcircled{3} \end{array} \times \begin{array}{cc} \square & \square & \square \\ \textcircled{2} & \textcircled{4} & \textcircled{5} \end{array}$$

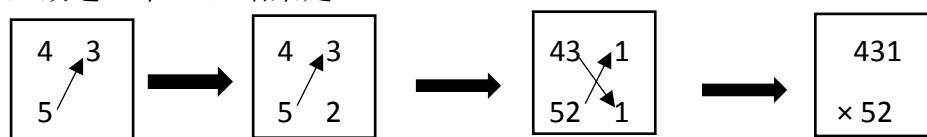
在课后作业中学生的表现令人欣慰，我为自己苦思冥想出来的方法沾沾自喜，可过了一个月后再做该题时，我的这份“欣喜”已消失得无影无踪，大部分学生已经将排位搞混或者干脆连方法都不记得而无从下手了，我不得不承认这样的“排位法”与乘法算式本身没有关联，学生只是当时记住了这套排位方法，这一轮教学是“失败”，还是要回归到算法上去。

3、第三轮教学——大数选数法

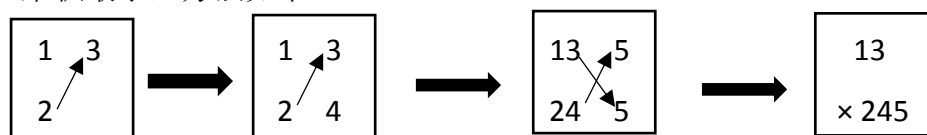
有了前两次的经验教训，我力求找到一个既不需要大量计算又不是硬搬照套的方法教给学生。经过请教有经验的老师我发现了大数选数法，先确定首位，首位大的数字乘的数字越大积越大，首位大的数字乘的数字越小积越小。以 1、2、3、4、5 为例：

乘积最大，先确定首位为 4 和 5，让 5 选与之相乘的数字 3，2 则填在 4 的

对面，已经确定 43×52 就是 5、4、3、2 这四个数字组成的乘积最大的两位数乘两位数，再确定 1 的位置，假如 1 在 52 的对面，则得 1 个 52，反之则得一个 43，故选 1 个 52，结果是 431×52 。



乘积最小，方法如下：



经过一段时间后再测，发现大多数学生也是在记忆做题步骤，知其然但不知其所以然。

三、问题分析

三轮教学尝试都没有达到理想的效果，问题到底出在哪呢？教学过程中，我到底遗漏了什么？我开始再次研读教材和教参，重新审视自己的教学。

1、该题到底要考查的是什么？

该题每次都在计算单元出现，是不是要考查学生的计算能力，凭借大量的计算得到结果？还是依靠死记硬背排位顺序？亦或许是浮于表面、似懂非懂，只记住做题流程？还是有其他选择？

再读教参时，发现教参明确指出：引导学生比一比每次所组成的三位数乘两位数的算式，看看其中存在怎样的规律。也就是说该题并不是要学生用大量计算得到结果，而是要让学生在多次尝试和调整之后发现其中关联，用发现的规律解决该题。也就是要把该题关联乘法的本源，弄清每个数字配搭的原因，在数学理解的基础上解决该题。

2、学生需要经历完整地探究过程吗？

由于平时课堂上时间有限，很多老师不舍得花大量时间探究一道题目，所以常常是嚼碎了放在孩子们面前，孩子们只需要消化记忆，带来的后果就是孩子缺少直接经验，很难将该新知融入已有知识体系，导致“前教后忘”。但若真要从乘法的本质入手，这道题目可能要花费一节课的时间，难道真的要为一道题再经历一次乘法本质的探究吗？

四、策略探寻

乘法有其自身的核心系统，将该题与乘法的本质进行有效关联，就能让学生水到渠成地运用所学乘法知识解决该题，达成数学理解。我将从以下三个方面对此进行讨论。

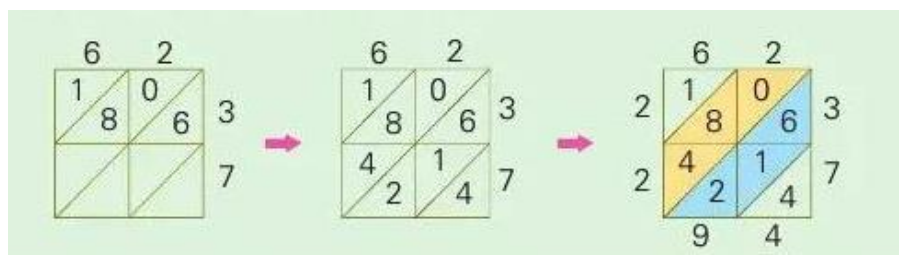
1、本质入手，创设结构化空间

构建结构化的空间，首先需要“有结构”的内容，从乘法的知识体系出发，先探明乘法的本质形成有结构的学习内容，给学生创设大结构、有弹性的思维空间。

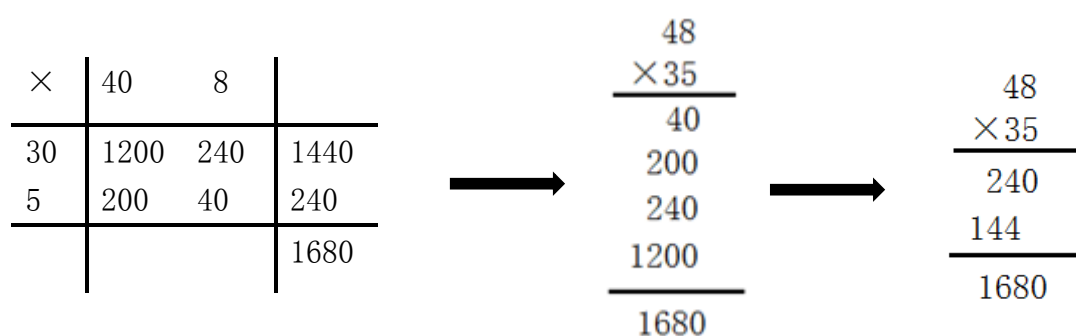
乘法其实就是很多加数累加的过程，这是一种十分古老的计算方法，早在3000多年前，便 在古埃及的纸草书中提及了“倍乘法”的相关内容。而与当前竖式乘法最为相似的形式便是我国的筹算乘法，只是在书写顺序与计算上有所差别。筹算乘法共分为三层，分别是上位、中位与下位，对应乘数、积与被乘数，计算方法是利用乘数最高位乘被乘数，将这位的算筹去掉，接下来再用乘数次高位乘被乘数，同样去掉这位的算筹，使两积对应位上的数相加，以此类推，直到乘完。例如：用算筹计算 26×13 。

筹算步骤	算筹摆法	操作过程
第一步	上位： $\equiv $ 中位： 下位： $\equiv $	用算筹在上位摆出乘数81，在下位摆出乘数81,下位个位上的1和上为十位上的8对齐，中位空着。
第二步	上位： $\equiv $ 中位： $\perp \equiv$ 下位： $\equiv $	用上位十位上的 8 乘下位十位上的 8，八八六十四，在中位的千位上摆横式的 6，百位上摆纵式的 4，得到 6400。
第三步	上位： $\equiv $ 中位： $\perp \equiv \equiv$ 下位： $\equiv $	再用上位十位上的 8 乘下位个位上的 1，一八得八，在中位的十位上摆出横式的 8，得到 6480。
第四步	上位： $ $ 中位： $\perp \equiv \equiv$ 下位： $\equiv $	取走上位十位上的 8，下位的 81 往右移一位，个位上的 1 和上位个位上的 1 对齐。
第五步	上位： $ $ 中位： $\perp \equiv \perp$ 下位： $\equiv $	用上位个位上的 1 乘下位十位上的 8，一八得八，在中位的十位上加上 8，得到 6560。
第六步	上位： $ $ 中位： $\perp \equiv \perp $ 下位： $\equiv $	再用上位个位上的 1 乘下位个位上的 1，一一得一，在中位加上 1，得到 6561。
第七步	上位： 中位： $\perp \equiv \perp $ 下位：	收去上位和下位的算筹，最后的乘积是 6561。

在乘法的演变过程中，还出现了比较新颖的方法，15 世纪中叶意大利一位数学家发现了“格子乘法”，后传入中国，明朝数学家程大位将这种方法命名为“铺地锦”。即把一个乘数各位上的数分别和另一个乘数各位上的数相乘，积写在相应的方格里，再从右下方开始，把斜对着的数分别相加，例如： 62×37



像这样的乘法计算方法历史上出现了很多，但不管是用“算筹”计算还是“铺地锦”等方法，其本质都是将乘数的每一位都拆开来，经历多次一位数和一位数相乘，再根据不同的计数单位进行累加的过程。例如： 48×36 ，就是将48拆成十位4（也就是40）和个位8，36拆成十位3（也就是30）和个位6，将这四个数字分别相乘，得到结果再累加。



（图 1）

（图 2）

（图 3）

多位数乘多位数的本质就是将乘数的各数字相乘并根据不同的计数单位累加（图 1），而竖式就是将上述累加的过程记录下来（图 2），由于每步都进行记录竖式就会冗长繁琐，所以数学家们一直在将竖式进行改进，经过历代人的努力竖式成了今天这样最简洁的形式。而今天的学生没有经历竖式演变的过程，简洁的竖式带来的后果是学生机械化地计算，很多学生对算理都是似懂非懂，遇到上述思考题就不能结合乘法算理进行思考。将乘法本质带入课堂教学，让学生理解多种方法之间的联系，更深刻地理解算理，感悟到算理其实是相通的，有助于学生有结构地思考，实现数学理解。

2、整体建构，设计结构化系统

结构化教学需要有结构的联通，将知识在整体建构，就要将数学知识纵向对比关联，形成结构化的知识网络。数学教材为符合学生的年龄特征及认知规律编排呈螺旋式上升式，小学阶段的整数乘法教学经历了四个阶段（如下表）。

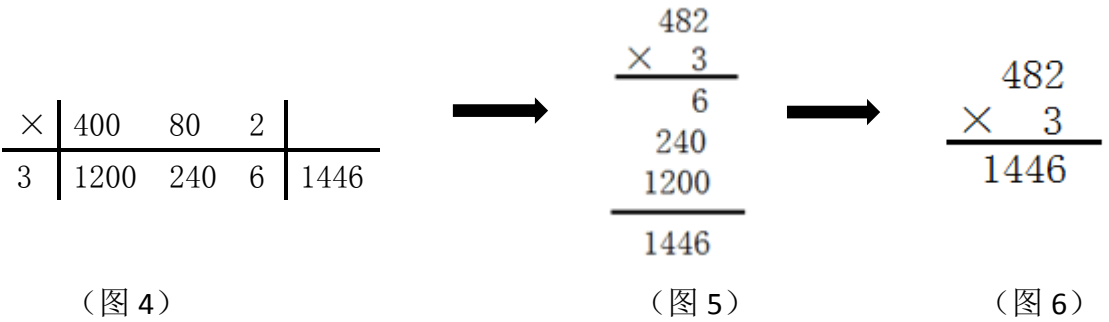
册次	单元主题
二年级上册	表内乘法
三年级上册	两、三位数乘一位数
三年级上册	两位数乘两位数
四年级上册	三位数乘三位数

很多老师都认为两位数乘两位数是学生学习整数乘法的一个转折点，乘法竖式的样子从以前的“一层”跨入“两层”，但从算理来看，乘法竖式算理都是将计数

单位累加的过程记录下来。所以笔者从将以下三块内容进行结构化教学：

(1) 两三位数乘一位数

教学两、三位数乘一位数时，教学会把三位数拆开，先算单根、再算整捆、最后算一大捆。例： 482×3 就是将 482 拆成 400、80、2 分别与 3 相乘，得到表格中的数据，为了方便可以将这些数据记录在竖式上，经过多次记录发现，有些位置一直是 0，所以数学家们发现竖式的记录方法可以更加简便，将 0 的位置用来写其他位上的得数，就形成了一层的竖式这种最终形式。

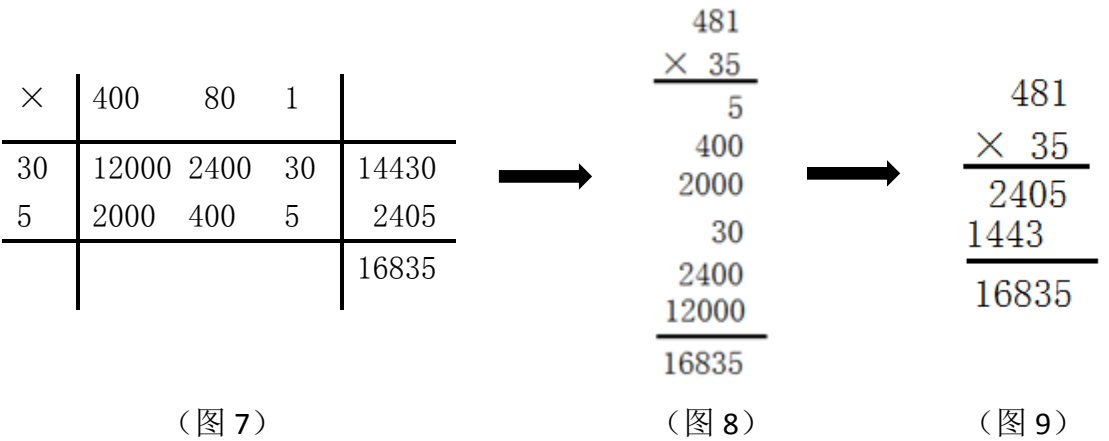


(2) 两位数乘两位数

同样的方法也适用于两位数乘两位数（见图 1-3），略有不同的是，两位数乘两位数要经历 4 次相乘得到 4 个得数，这 4 个得数在竖式中不能整体合并，只能根据 0 的位置两两合并，所以中间层不能省略，竖式也就保留了两层。

(3) 三位数乘两位数

三位数乘两位数要经历 6 次乘法，得到 6 个得数，并三个三个合并，所以三位数乘两位数和两位数乘两位数一样第二层只有两个得数，只是这个得数要通过三次相乘得到。



在经历了第二层三个得数合并的过程之后，学生自然而然地拓展到了四个甚至更多得数合并的情况，也就是多位数乘多位数。此时学生对乘法的模型已基本建立，任意整数乘法学生都可以从乘法本质入手，将其拆分成多个一位数乘一位数，哪怕不借助竖式也能算出结果。

在乘法本质的基础上进行结构化设计，让学生在沟通关联中形成网状的知识结构，不仅丰富了数学经验，拓宽了数学视野，更加促进了学生数学思维和能力

的更好发展，为后续学习做好了铺垫。

3、灵活运用，打通结构化联系

灵活运用需要寻找任务与已有经验的联系，用这种联系延展前面的学习，自主迁移至新任务，从而提升学生的结构化思维。基于乘法竖式结构化的教学，学生通过乘法本质理解了乘法竖式的算理，更可贵的是，学生不用单纯依靠竖式计算出得数，实现了算法多样化。再次回到四年级下册的思考题，学生有了全新的想法。

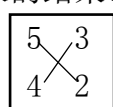
例：1、2、3、4、5 这五个数字组成一个三位数乘两位数，积最大是？积最小是？

(1) 积最大：先确定最高位是 5 和 4，再判断 53×42 和 52×43 哪个算式得数大。

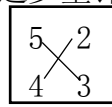
×	50	3	
40	2000	120	2120
2	100	6	106
			2226

×	50	2	
40	2000	80	2080
3	150	6	156
			2236

回归两位数乘两位数的本质，发现这两个乘法只有圈出部分得数不同，所以比较两个乘法算式的大小只要比较圈出部分的和，其实就是比较四个数字交叉相乘的结果。这样就可以通过少量计算得到答案为 52×43 。



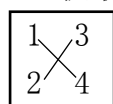
$$5 \times 2 + 4 \times 3 = 22$$



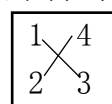
$$5 \times 3 + 4 \times 2 = 23$$

再确定 1 的位置， $520 \times 43 = 52 \times 430$ ，1 在 52 的后面多 1 个 43，1 在 43 的后面多 1 个 52，所以确定答案为 52×431 。

(2) 积最小：通过交叉相乘得到 13×24 。



$$1 \times 4 + 2 \times 3 = 10$$



$$1 \times 3 + 4 \times 2 = 11$$

比较 5 个 13 和 5 个 24 得到 13×245 。

原本理不清头绪的一道题似乎变得很简单，这样的教学水到渠成，没有大量计算，也不需要为了该题花大量时间进行探究，但学生真实地看到了知识的发生与发展，所以能很自然地将乘法的本质运用到这样稍复杂的任务中去，让学习更加高效。

五、结语

学生对乘法本质的理解、整数乘法结构的构建靠短时间是建立不完善的，在教学中不仅需要教师深挖知识背景，还要关注教材的整体脉络及逻辑结构，系统梳理相关知识点，以发展学生能力为目标，采用关联、迁移、重组、拓展等策略实施结构化教学，让学生在结构化学习中构建有结构的知识网络，实现数学理解。

当然整数乘法的结构化教学知识教学研究的冰山一角，真正实现数学理解还需要立足课堂、勤于研究。

【参考文献】

[1]林崇德. 教育与心理发展——教育为的是学生发展[M]. 北京:北京师范大学出版社, 2013: 74-75.

[2]柳敏敏. 结构化思辨：促进概念建构的重要方式[J]. 小学数学教育, 2019, 10.

[3]张奠宙. 小学数学教材中的大道理[M]. 上海: 上海教育出版社, 2018: 64-78.

[4]国家教育部. 数学课程标准[M]. 北京师范大学, 2011.

[5]邵文川. 结构化教学，让学习深度发生[J]. 小学数学教育, 2020, 5.

PaperPass旗舰版检测报告
简明打印版

比对结果(相似度):

总体:	10%	(总体相似度是指本地库、互联网的综合对比结果)
本地库:	10%	(本地库相似度是指论文与学术期刊、学位论文、会议论文、图书数据库的对比结果)
期刊库:	8%	(期刊库相似度是指论文与学术期刊库的对比结果)
学位库:	4%	(学位库相似度是指论文与学位论文库的对比结果)
会议库:	1%	(会议库相似度是指论文与会议论文库的对比结果)
图书库:	5%	(图书库相似度是指论文与图书库的对比结果)
互联网:	0%	(互联网相似度是指论文与互联网资源的对比结果)

报告编号: 60D34827DBB6D0B8F
检测版本: 旗舰版
论文题目: 让数学理解在结构化教学中落地生根
论文作者: 汪丹
论文字数: 5713字符(不计空格)
段落个数: 142
句子个数: 252句
提交时间: 2021-6-23 22:41:43
比对范围: 学术期刊、学位论文、会议论文、书籍数据、互联网资源
查询真伪: <http://www.paperpass.com/check>

句子相似度分布图:

