

回归数学本质,教学才有力量

——“平面向量的实际背景及其基本概念”的教学解析

王克勤¹, 张晓斌²

(1.重庆市渝北区教师进修学院, 重庆 401120; 2.重庆市教育科学研究院, 重庆 400015)

[摘要] 数学的本质是什么? 怎样回归数学的本质? 教学的力量在哪里? 这其实一直是一线教师冥思苦想、不得其解, 但又不懈追求的话题。数学教学要回归到生活数学“本源”, 才能挖掘激发出数学课堂“活力”; 数学教学要回归到类比生成“本味”, 才能自然暴发出数学课堂“效力”; 数学教育要回归到人文教育“本真”, 才能完美散发出数学课堂“魅力”。以三个“回归”践行了“三会”, 以“三本”“三力”阐释了“三会”。

[关键词] 数学本质; 教学解析; 数学教学; 概念教学; 平面向量; 数学核心素养

[中图分类号] G633.6 **[文献标识码]** A **DOI:**10.3969/j.issn.1005-1058.2020.01.009

一、问题的提出

“平面向量的实际背景及其基本概念”是人教版高中数学必修4第二章第一节的教学内容, 是平面向量的起始课, 概念多、起点低、篇幅少, 很多教师都觉得内容简单、讲不出新意、研究价值不大, 是一个长期在日常教学中不被重视的课题。在教学视导中, 我们发现两种倾向: 一是大量堆砌实例, 如力、速度、位移等, 然后直接得出结论——这些就是向量。这无疑是用事例替代定义, 根本没有触及究竟什么是向量, 其结果是学生根本不明白向量的本质是什么。二是简单的情景引入之后, 直接提出向量的定义, 随即进入向量的基本运算。这显然是舍本逐末, 其结果是学生学会了向量运算, 却不知道为什么要学习向量, 也不知道向量的优越性在哪里, 更谈不上直观想象、数学抽象等核心素养的培育了。

核心素养是数学思想的主旨, 核心素养指引着思想方法。核心素养并不是用来“摆拍的风景”, 而是供学生感悟和吸收的灵魂。核心素养也不是老师“教”出来的, 而是学生在经历知识的发生发展过程中自然而然“生成”出来的。概念课是体现数学

思想方法的重要渠道, 因此, 概念教学更需要以核心素养为统领。但是, 概念的生成一直是教学与教研的盲点。多数教师对概念课不重视, 多数教研对起始课不涉及, 这是一线课堂教学的通病。结果导致在质量监测数据反馈的信息中显示, 学生在基本概念的理解与运用上严重失分。我们与教师们讨论交流时发现, 教师们对向量概念还没有站在研究数学对象的高度认识、思考和设计向量教学, 缺乏对向量本质的回归、向量研究内容的抽象、向量研究思路的构建、向量研究方法的引导。

回归数学教育的本来面目, 着眼于发展学生的长远利益, 发挥数学的内在力量^[1], 才是课堂教学的力量源泉。如何设计, 才能直击向量的本质, 展示教学的力量, 将固化的数学知识还原为自然生成的、动态发展的数学知识, 笔者带领教师和教研组一起深入探索思考。通过实践检验, 数学教学要回归到生活数学“本源”, 才能激发出数学课堂的“活力”; 数学教学要回归到类比生成“本味”, 才能暴发出数学课堂的“效力”; 数学教育要回归到人文教育“本真”, 才能散发出数学课堂的“魅力”。“三本”“三力”的观点和做法对于指导数学教育教学、提升

[基金项目] 重庆市教育科学“十二五”规划2014年度重点课题“利用教育质量监测数据增进区域教研实效性策略研究”(课题批准号: 2014-11-001)。

[作者简介] 王克勤, 本科, 高级教师, 重庆市渝北区教师进修学院中等教育研究室主任, 研究方向: 中学数学教育教学研究; 张晓斌, 本科, 研究员, 特级教师, 教育部基础教育专家库成员, 重庆市学术技术带头人, 研究方向: 中学数学教育、教学评价。

教研实效性有很好的效果。

二、内容解析

著名哲学家、数学家莱布尼茨提出:能否直接计算几何对象?通过一定的法则,建立一套符号体系,计算并演绎出几何关系^[2]。向量就是实现莱布尼茨这一思想的理想载体。从理解数学角度看,本节是“平面向量”这一章的起始课,对后续学习三角函数、解析几何、立体几何等相关知识具有奠基作用。向量概念引入后,全等、平行、平移、相似、垂直、面积、夹角、距离、勾股定理、余弦定理等几何问题就可以转化为向量的加(减)法、数乘向量、向量的数量积等运算(运算律),从而把图形的几何关系转化为向量的运算关系。向量是沟通代数、几何、三角的有力工具。本节的重点就是通过丰富的实际背景,抽象出兼具“数、形”二性的向量。

从理解学生角度看,在学习本节课之前,学生已经在物理中学习了既有大小又有方向的量——矢量,同时学生已经熟悉实数与平面几何的相关知识,积累了一些基本的数学活动经验。而本节完全可类比实数来学习向量的相关知识,这些就为学生学习本节课奠定了良好的基础,也是向量知识的发生点,是学生已有知识的最近发展区。但是,由于我们的学生进入高中时间还不长,对一些数学思想方法掌握不牢固、应用不灵活,同时大部分学生的直观想象、数学抽象能力还没有达到较高的水平,这又成为学生学习本节课一个无形的障碍。

我国著名数学家、数学教育家傅种孙先生说:“几何之务,不在知其然而在知其所以然;不在知其所以然,而在何由以知其所以然。”^[3]从“理解教学”的角度看,通过向量的实际背景,重在引导学生领悟向量的来源,感悟数学思想,积累数学活动经验,用数学的方式认识和表达平面向量、向量的模、零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量等基本概念。通过类比实数学习向量,让学生初步领会类比推理的数学思想方法。通过几何画板演示实验,让学生领会数形结合、抽象归纳和特殊到一般的数学思想方法。从而,培养学生认识客观事物的数学本质的能力,培养学生数学的思维之道,培养学生的科学精神和人文素养。

三、教学解析

(一)回归生活本源,激发课堂活力

情景一:以A点为参照点,你能确定B点的位置吗?(图略)确定位置需要哪些关键要素?

情景二:公路边的路牌(图略)上有哪些关键信

息能帮助我们确定位置?

问题1:上面两个问题有什么共同点?体现了哪些关键因素?

学生回答:都是实际生活问题,其中,方向和距离是两个最关键的要素。

意图解析:情景不需多,关键在于活。为了创设真实的教学情境,激发学生的求知欲,我们就以学生熟悉的地点B为目的,通过事先查看地图,并以问题为先导,利用“B点在A点什么位置”启发学生从地图上抽象出图示中的“方向和大小”两个要素,接着再从路标上抽象出现实中的“方向和大小”两个要素,让学生从实际背景中初步感知向量的真实存在性,真切领会数学与现实生活的密切联系。

问题2:现实世界中还存在像这样既有大小又有方向的量吗?请同学们举例说明。

众生回答:力 F 、速度 V 、加速度 a 等都是既有大小又有方向的量。

教师:物理中这些既有大小又有方向的量统称矢量,相应地,如温度、时间、路程等这些只有大小没有方向的量统称标量。

意图解析:让学生开放式列举、分类、对比分析,进一步感知向量的普遍存在性和特殊性,领会数学与其他学科的密切联系。

问题3:这些量与我们学过的实数有什么区别?

学生回答:实数只有大小,没有方向。

教师:对,数学中把这种与众不同的“既有大小又有方向的量称为向量”。这两种量的对应关系是:矢量—向量,标量—数量。

意图解析:对比数量看向量,形成认知冲突,自然获取“向量”这一新的数学研究对象。同时,类比实数,联想向量,为揭示向量的本质及表示埋下伏笔。

由此,通过生活情境引入,初步感知向量。为了直观简洁地让学科数学回归到生活数学“本源”,教师要根据本课的教学目的、学生的认识规律和知识的内部联系,创设一种教学中的问题情境,以引起学生内部的认知矛盾冲突,激起学生求知欲,激发课堂活力。本课伊始,创设了真实情景,直接以熟悉的地点为目的,启发学生首先从地图上抽象出图示中的“方向和大小”两个要素,再从路牌上抽象出现实中的“方向和大小”两个要素。这样让学生从图示回归到现实,初步感知向量的真实存在

性,真切领会数学与现实生活的密切联系,充分挖掘出数学课堂在实际背景中的活力,培养学生的人文底蕴和实践创新等核心素养。

(二)回归生成本味,促发课堂效力

问题4:类比实数可以用阿拉伯数字和数轴上的点表示,向量如何表示呢?请按照要求画出物体所受到的力。

众生活动:借助物理情景,学生很容易找到力的大小和方向并正确画出(如图1,图2)。

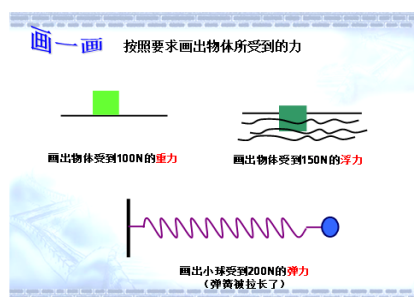


图1

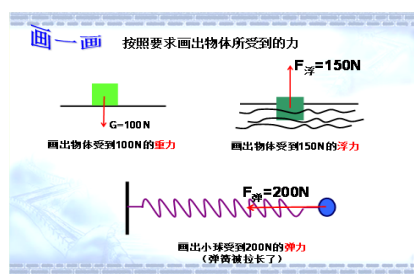


图2

教师:现在,我们完全抛开一切具体的物理背景,只探究其大小和方向,能看到什么?发现什么呢?

学生回答:物体可抽象成质点,力可抽象成有向线段(如图3)。

教师:很好!我们进一步剥去它们的物理外衣,其本质就是一条光光的有向线段(如图4),它既非常简洁地刻画出向量的“数、形”二性,又形象直观地反映出向量的本质内含:向——方向,量——大小。因此,向量是去掉了具体的物理属性的矢量,它将是我們学习数学常用的工具和模型。

意图解析:类比力的表示,层层剥离,逆向回归,揭示向量本质,通过对现实问题的数学抽象获得向量这一数学对象,形象地展示出向量的生成过程,抽象出向量表示的合理性、必要性、科学性、工具性。

向量的生成是本课的关键。“数学教育的学科定位一定要强调它的跨学科特征”^[4],因此,本课借助物

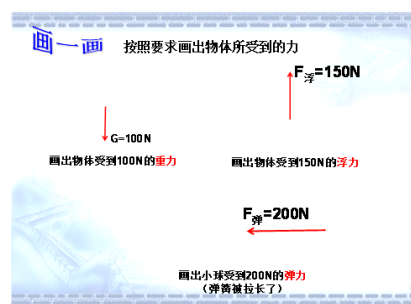


图3

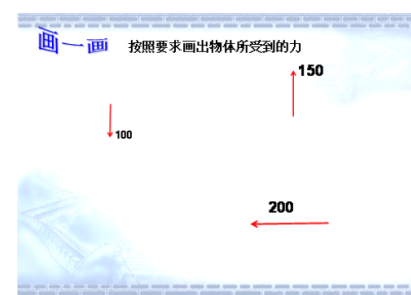


图4

理情景,将具体的物体抽象成点,将力抽象成有向线段,逐层剥离,其本质就是一条光光的有向线段,它既简洁地刻画出向量的“数、形”二性,又形象直观地反映出向量的本质内含:向——方向,量——大小。这样,形象地展示出向量的生成过程,使我们看到了生成向量的合理性,从而让学生更容易接受并喜欢向量,变乏味数学为趣味数学。

虽然向量有其坚实的物理背景,但当我们抛开这些背景,只从纯粹数学的角度来看,用向量表示几何要素更加直观、简洁,这使我们看到了引进向量的必要性。从而深刻揭示向量本质,完整生成向量概念,顺利实现从具象数学到抽象的概念化数学的第一次回归,完成了向量的感性抽象。

众生活动:回归教材,讨论交流,理解向量概念,明确向量的研究内容,建构向量体系。

(1)向量的几何表示:用有向线段表示向量,记作 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} 等;

(2)向量的符号表示:也可以用字母表示,记作 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 等;

(3)向量的模:向量 \overrightarrow{AB} 的大小,就是向量 \overrightarrow{AB} 的长度,记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 。

问题5:向量有几种表示?他们的关系是什么?

意图解析:借助三种语言理解向量的概念,建构平面向量的语言体系(如图5)。

问题6:类比实数系中的特殊数0和1,向量中

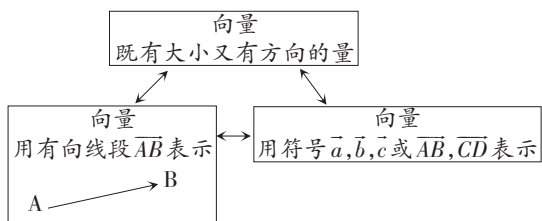


图5

有没有这样的特殊成员呢？如果有，模和方向会是怎样的呢？

学生回答：有，零向量，单位向量。

教师：什么是零向量？单位向量？怎么理解？怎么表示？

学生回答：模为0的向量叫零向量，模为1的向量叫单位向量。

教师：对，这是用模长定义的，它们的方向呢？

众生杂议：没有方向？任意方向？规定方向？

教师：看来这个问题很有必要深入思考讨论，看谁又能说服谁？

众生活动：思考、交流、讨论、争论。肯定应该有方向，没有方向怎么成为向量呢？但关键是怎么确定它们的方向呢？

教师：谁都不能说服谁了吧！好，我们一起来做一个小体验。请一位同学上来，听我口令：立正！向右转！向右转！向右转！向右转！请问：他在旋转一周的过程中，位移改变了吗？方向改变了吗？

众生回答：位移始终没改变，方向一直在改变。

教师：按照定义“模为0的向量叫零向量”，在旋转一周的过程中所产生的都是零向量，由此看来，零向量不仅有方向，而且方向还是任意的。这就是零向量的特殊性，为了区别起见，我们通常用 $\vec{0}$ 表示零向量。

学生：类似地，单位向量的终点构成单位圆。

教师：对，但必须共起点。由图6可知，一个确定的单位向量方向是唯一确定的。

意图解析：类比实数系中的0和1探究 $\vec{0}$ 和单位向量，初步建构平面向量运算体系中的基本“元”。借助实验活动，让学生亲身经历感受 $\vec{0}$ 和单位向量方向的特殊性。

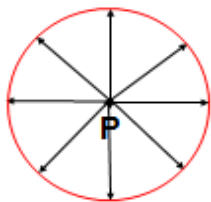


图6

数学源于抽象。在数学教学过程中，观察、分析、比较、类比、归纳、抽象、概括等各种思维形式随时都在发挥作用。为了突出向量概念的理解这一重点，本课着重组织

了三次类比教学：一是类比实数的表示探究向量的表示；二是类比实数系中的0和1探究 $\vec{0}$ 和单位向量；三是类比实数关系探究向量关系。这样，依次引导出向量的研究方法，让学生自然而然地去感受、体会，学会类比研究的方法。值得一提的是教师随机应变，临时采取紧急措施，请学生自己原地打转，亲身经历感受 $\vec{0}$ 方向的特殊性，轻松自然地突破了零向量方向是任意的这一难点。

问题7：类比实数间的相等或不等关系，向量间会有什么关系呢？

师生活动：借助几何画板动画演示，展现向量之间的平移、重合、相反关系，引导学生抽象得出：

(1)平行向量：方向相同或相反的非零向量，记作 $\vec{a} // \vec{b}$ 。行向量也叫共线向量。特别指出：零向量与任一向量平行。

(2)相等向量：模相等且方向相同的向量，记作 $\vec{a} = \vec{b}$ 。

意图解析：类比实数的相等或不等关系，通过平移重合抽象出共线向量和相等向量，初步建构平面向量推理体系的基本依据。

数学教育心理学认为，学生数学学习的特点是“接受—建构”式的，它既是接受已有数学知识的过程，同时也是自主建构数学体系的过程，二者相辅相成，螺旋上升。接受是显性的，接受的多少快慢是可测可控的，接受是建构的基础，接受的好坏直接影响体系的建构；而建构则是隐性的，是难以测控的，体系的建构又反作用于接受能力的提升；接受是由建构支撑的，建构是接受的发展动力，接受的获得与加强，又使建构更加巩固并不断升华。因此，数学学习是一个从接受到建构循环往复、逐步提升的过程^[5]。在这一理论指导下，本课按照循序渐进的原则，依次进行了向量的三重建构：一是借助数学的三种语言以此建构平面向量的语言体系；二是合理规定 $\vec{0}$ 和单位向量以此建构平面向量的运算体系；三是合理规定共线向量和相等向量以此建构平面向量的推理体系。这三大建构最终将直接支撑起整个向量体系，实现从概念化数学到系统化数学的第二次回归，完成了向量的理性抽象。也让我们看到了引进向量的科学性、系统性，构建出向量的研究思路。因此，本课自然将会爆发出深远的课堂“效力”。

两次回归的教学机制，让学生亲身经历和体会了知识的发生过程，缩短了学生已有经验与未知知识的距离，学生的思维从初级心理状态发展到高级

认知阶段,进而培养了学生的科学精神和学会学习的核心素养。

(三)回归人文本真,散发课堂魅力

问题8:回味本堂课,有何所获?

(1)数学知识:向量的背景与概念;向量的表示;向量间的基本关系。

(2)数学方法:抽象归纳;类比推理;数形结合。

(3)数学感悟:人生犹如向量,我们既要有强大的动力支撑,更要有正确的方向保证,二者不可或缺。

意图解析:总结向量知识,归纳提升方法,回味感悟思想,润情感态度价值观于教学细节之中。

教师既是知识的传授者,同时又是人格的塑造者。因此,教师要善于挖掘数学内容所蕴含的育人价值,以提高数学素养,发展思维能力,培养理性精神,使学生在掌握数学知识的过程中学会思考。我们不能总是纠结于学生记住了多少知识,考了多少分,更应该关注学生对知识产生了多大的兴趣,是否感受到知识的内在魅力。本课最后虽寥寥数语,但画龙点睛:人生犹如向量,我们既要有强大的动力支撑,更要有正确的方向保证,二者不可或缺。这既是对向量本质的领悟,也是对人生真谛的感悟,是为培养学生责任担当与健康生活的核心素养而启迪心灵,更是数学与人文的回归融合,是数学课堂魅力的完美展现。

通过以上三个“回归”,不难看出:教学的力量并不在于对定义、法则、定理、结论的灌输与积累,而在于让知识内化为学生自身的力量。教师在课堂教学过程中,要有目的地培养学生的“回归”意识,引导学生从明确概念的内涵入手,构建研究的思路,逐步抽象出概念的本质,回归数学的本源、本味、本真,才能更好体现课堂教学的活力、效力、魅力。“三本”“三力”相互依存,共同促进,达成了三个目标:一是让学生掌握知识;二是提升思维;三是发展素养。这样我们就把概念教学和核心素养紧密结合在一起了。

四、理念解析

史宁中教授提出“三会”:会用数学的眼光观察现实世界,会用数学的思维思考现实世界,会用数学的语言表达现实世界^[6]。根据“三会”理念,本课就平面向量的实际背景及其基本概念这一问题,利

用三个“回归”进行了实践和阐释。

回归生活本源,就是准确把握数学内容的本质,创设合适的教学情境,让学生在情境中感知知识技能,感悟数学内容的本质,积累数学思维的经验。学生是否会看问题是一种经验的积累,所以老师的责任之一就是帮助学生积累数学活动经验:思维的经验、做事的经验。因此,回归生活本源就是引导学生“做”,从本质上说就是让学生会用数学的眼光观察现实世界的真实现象,激发学生积极乐观向上的生机活力,激发学生强烈求知欲的兴趣活力,激发学生动手实践操作的创造活力,从而培养学生数学抽象和直观想象核心素养。

回归生成本味,就是在教师的启发下,依托合适的教学情境,提出好的问题,引发学生思考,进入生成状态,感知生成过程,构建生成体系。让学生自然而然地学会思考是很难的,学生是否会想问题不是老师教会的,是自己领悟出来的。老师的责任之一就是要帮助学生敢于思考、学会思考、善于思考。因此,回归生成本味就是引导学生“想”,从本质上说就是让学生会用数学的思维思考现实世界的客观规律,促发数学课堂的认知效力、思维效力、素养效力,从而培养学生逻辑推理和数学运算核心素养。

回归人文本真,就是借助人文数学回归人性素养,打造人文课堂,超越学科知识和智慧,启迪学生灵魂,促进学生领悟、欣赏、表达出数学特有的审美艺术。因此,回归人文本真就是引导学生“说”,从本质上说就是让学生学会用数学的语言表达现实世界普遍真理,散发数学素养的学术魅力、艺术魅力、人文魅力,从而培养学生的数学建模和数据分析核心素养。▲

参考文献:

- [1] 章建跃.理解数学是教好数学的前提[J].数学通报,2015,54(1):61-63.
- [2] 张景中,彭翥成.点几何的教育价值[J].数学通报,2019,58(2):1-4,12.
- [3] 章建跃.核心素养统领下的立体几何教材变革[J].数学通报,2017,56(11):1-6,18.
- [4][5] 章建跃.章建跃数学教育随想录:上卷[M].杭州:浙江教育出版社,2017:6,15.
- [6] 史宁中,林玉慈,陶剑,等.关于高中数学教育中的数学核心素养:史宁中教授访谈之七[J].课程·教材·教法,2017,37(4):8-14.