

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式（第一课时）

江阴市成化高级中学 张龙伍

一、教材分析

本节课是新版教材人教版 2019A 版普通高中课程标准实验教科书数学必修第一册第二章第 3 节《二次函数与一元二次方程、不等式》第 1 课时。从内容上看是初中数学学过的一元一次不等式的延伸，同时也是与一元二次方程、二次函数之间紧密联系，涉及的知识面更多。从数学思想方法上看，本节课突出体现了转化与化归、数与形结合等思想。同时一元二次不等式是解决函数定义域、值域等问题的重要工具，因此本节课在整个高中数学中具有较重要的地位和作用。

二、教学目标与核心素养

（一）课程目标

- 1.理解一元二次方程、一元二次不等式与二次函数的关系，掌握图像法解一元二次不等式的方法；
- 2.通过函数图像探究一元二次不等式与相应函数、方程的练习，获得一元二次不等式的解法；
- 3.培养勇于探索、勇于创新的精神，同时体会事物之间普遍联系的辩证思想。

（二）学科素养

- 1.数学抽象——一元二次不等式的定义及解法；
- 2.逻辑推理——理解三个“二次”的关系；
- 3.数学运算——按步骤解决一元二次不等式；
- 4.直观想象——运用二次函数图像解一元二次不等式；
- 5.数学建模——将生活中的不等关系转化为一元二次不等式解决。


三、教学重、难点

- 重点：1.从实际问题中抽象出一元二次不等式模型；
2.围绕一元二次不等式的解法展开,突出体现转化与化归、数与形结合等数学思想.
- 难点：理解二次函数、一元二次方程与一元二次不等式的内在联系。

四、课前准备

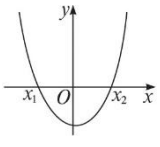
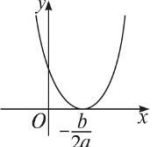
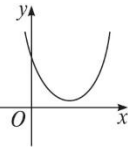
多媒体、实物展台等

五、教学过程

教学过程	设计意图
<p>（一）情境引入</p> <p>问题引入：园艺师打算在绿地上用栅栏围一个矩形区域种植花卉．若栅栏的长度是 24m，围成的矩形区域的面积要大于 20m^2，则这个矩形的边长为多少米？</p>  <p>设这个矩形的一条边长为 $x\text{m}$，则另一条边长为 $(12-x)\text{m}$．</p> <p>由题意，得：$(12-x)x > 20$，其中 $x \in \{x 0 < x < 12\}$．</p> <p>整理得 $x^2 - 12x + 20 < 0$ ①</p> <p>求得不等式①的解集，就得到了问题的答案．</p>	<p>通过具体的生活情境,引入本节课题,让学生明确学习本节课内容的必要性,形成一元二次不等式的概念,进一步培养学生数学抽象和数建模的核心素养等。</p>

<div data-bbox="180 201 363 241" data-label="Section-Header"> <p>(二) 新知探索</p> </div> <div data-bbox="167 268 406 309" data-label="Section-Header"> <p>1、一元二次不等式</p> </div> <div data-bbox="167 318 1193 470" data-label="Text"> <p>一般地，我们把只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式．一元二次不等式的一般形式是 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$，其中 a, b, c 均为常数，$a\neq 0$.</p> </div> <div data-bbox="167 488 406 528" data-label="Section-Header"> <p>2、二次函数的零点</p> </div> <div data-bbox="167 537 1193 645" data-label="Text"> <p>一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点．</p> </div> <div data-bbox="220 654 1034 743" data-label="Text"> <p>注：(1)二次函数的零点不是点，是二次函数与 x 轴交点的横坐标． (2)一元二次方程的根是相应一元二次函数的零点．</p> </div> <div data-bbox="167 761 1193 927" data-label="Text"> <p>思考：在初中，我们学习了从一次函数的观点看一元一次方程、一元一次不等式的思想方法。类似地，能否从二次函数的观点看一元二次不等式，进而得到一元二次不等式的求解方法呢？</p> </div> <div data-bbox="167 954 1193 1070" data-label="Text"> <p>探索问题：一元二次不等式 $x^2-12x+20<0$ 与二次函数 $y=x^2-12x+20$ 之间的关系？</p> </div> <div data-bbox="167 1097 710 1146" data-label="Text"> <p>二次函数 $y=x^2-12x+20$ 的函数图像如下，</p> </div> <div data-bbox="403 1155 718 1514" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="167 1550 869 1590" data-label="Text"> <p>思考：当 x 为何值时，$y=0$，函数图像与 x 轴有什么关系？</p> </div> <div data-bbox="167 1612 774 1653" data-label="Text"> <p>当 x 为何值时，$y<0$，函数图像与 x 轴有什么关系？</p> </div> <div data-bbox="167 1675 801 1715" data-label="Text"> <p>当 x 为何值时，$y>0$，函数图像与 x 轴有什么关系？</p> </div> <div data-bbox="167 1738 774 1778" data-label="Text"> <p>思考：对于一般一元二次不等式的解集怎么求呢？</p> </div> <div data-bbox="167 1805 1193 2047" data-label="Text"> <p>我们知道，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$)，设其判别式为 $\Delta=b^2-4ac$，它的解按照 $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$ 分为三种情况，相应地，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 与 x 轴的相关位置也分为三种情况（如下图），因此，对相应的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ ($a>0$) 的解集我们也分这三种情况进行讨论。</p> </div>	<div data-bbox="1209 201 1420 613" data-label="Text"> <p>通过具体的一元二次不等式解法的实践探究,让学生体会转化与化归、数与形结合的数学思想方法。同时进一步培养学生的数学抽象和数学直观的核心素养。</p> </div>
--	---

根据二次函数及其对应的不等式与方程之间的联系，填写下列表格：

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
$ax^2+bx+c=0$ 的根	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	\varnothing
$ax^2+bx+c>0$ 的解集	$\{x x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$	$\{x x \neq -\frac{b}{2a}\}$	\mathbf{R}
$ax^2+bx+c<0$ 的解集	$\{x x_1<x<x_2\}$	\varnothing	\varnothing

归纳小结： (1) 对于一元二次不等式的二次项系数为正且存在两个根的情况下，其解集的常用口诀是：大于取两边，小于取中间。

(2) 对于二次项系数是负数(即 $a<0$)的不等式，可以先把二次项系数化为正数，再对照上述情况求解。

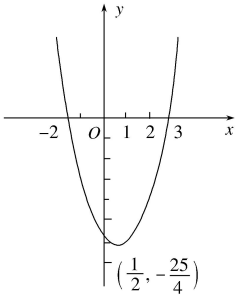
(三) 思考诊断

1. 二次方程 $x^2-x-6=0$ 的根与二次函数 $y=x^2-x-6$ 的零点有怎样的关系？

[答案] 方程 $x^2-x-6=0$ 的判别式 $\Delta=1-4\cdot 1\cdot (-6)=25>0$ ，可知这个方程有两个不相等的实数根，解此方程得 $x_1=-2$ ， $x_2=3$ 。所以二次函数有两个零点： $x_1=-2$ ， $x_2=3$ 。所以二次方程的根就是二次函数的零点

2. 画出二次函数 $y=x^2-x-6$ 的图象，你能通过观察图象，获得不等式 $x^2-x-6>0$ 及 $x^2-x-6<0$ 的解集吗？

[解析] 二次函数 $y=x^2-x-6$ 的图象如图，观察函数图象可知：



当 $x<-2$ ，或 $x>3$ 时，函数图象位于 x 轴上方，此时， $y>0$ ，即 $x^2-x-6>0$ 的解集为 $\{x|x<-2 \text{ 或 } x>3\}$ ；

当 $-2<x<3$ 时，函数图象位于 x 轴下方，此时 $y<0$ ，即 $x^2-x-6<0$ ；所以，不等式 $x^2-x-6<0$ 的解集是 $\{x|-2<x<3\}$

3. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1) $mx^2-5x<0$ 是一元二次不等式。()

(2) 若 $a>0$ ，则一元二次不等式 $ax^2+1>0$ 无解。()

(3) 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1 ， $x_2(x_1<x_2)$ ，则一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x|x_1<x<x_2\}$ 。()

(4) 不等式 $x^2-2x+3>0$ 的解集为 \mathbf{R} 。()

[答案] (1)× (2)× (3)× (4)√

小组活动：
1、仿照上述过程讨论填写“三个二次”之间的关系表格。
2、讨论总结在这个过程中用到了哪些数学思想和数学方法？

通过思考诊断，进一步加深对一元二次方程的根与二次函数的零点的区别与联系，同时也进一步理解三个“二次”的关系。

(四) 典型例题

题型一 一元二次不等式的解法

例 1: 解不等式: $x^2 - 2x - 15 \geq 0$

解: 原不等式变形为 $(x+3)(x-5) \geq 0$

方程 $(x+3)(x-5)=0$ 的两根为: $x=-3$, 或 $x=5$

\therefore 不等式的解集为: $\{x \mid x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 5\}$ 。

例 2: 解不等式 $-x^2 + 2x - 3 > 0$

解: 整理, 得 $x^2 - 2x + 3 < 0$

因为 $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ 所以方程 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 无实数根

所以原不等式的解集为 ϕ

例 3、解不等式: $x^2 + 4x + 4 > 0$

解: 原不等式 $\Leftrightarrow (x+2)^2 > 0 \Leftrightarrow \{x \mid x \neq -2\}$

小结:

解一元二次不等式的一般步骤

- (1) 通过对不等式变形, 使二次项系数大于零;
- (2) 计算对应方程的判别式;
- (3) 求出相应的一元二次方程的根, 或根据判别式说明方程没有实根;
- (4) 根据函数图象与 x 轴的相关位置写出不等式的解集.

练习巩固:

1. 解下列不等式:

$$(1) -x^2 + 7x > 6; \quad (2) (2-x)(x+3) < 0; \quad (3) 4(2x^2 - 2x + 1) > x(4-x).$$

[解] (1) 原不等式可化为 $x^2 - 7x + 6 < 0$.

解方程 $x^2 - 7x + 6 = 0$ 得, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

结合二次函数 $y = x^2 - 7x + 6$ 的图象知, 原不等式的解集为 $\{x \mid 1 < x < 6\}$.

(2) 原不等式可化为 $(x-2)(x+3) > 0$.

方程 $(x-2)(x+3) = 0$ 两根为 2 和 -3.

结合二次函数 $y = (x-2)(x+3)$ 的图象知, 原不等式的解集为 $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$.

(3) 由原不等式得 $8x^2 - 8x + 4 > 4x - x^2$.

\therefore 原不等式等价于 $9x^2 - 12x + 4 > 0$.

解方程 $9x^2 - 12x + 4 = 0$, 得 $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$.

结合二次函数 $y = 9x^2 - 12x + 4$ 的图象知, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x \neq \frac{2}{3}\right\}$.

通过典型例题的解析, 让学生总结归纳, 解一元二次不等式的基本步骤。

通过练习巩固本节所学知识, 提高解决一元二次不等式的能力, 增强学生的数学抽象和数学直观和数学运算的素养。

<p style="text-align: center;">题型二 三个“二次”关系的应用</p> <p>例 2、已知关于 x 的不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $\{x 1<x<2\}$，求关于 x 的不等式 $bx^2+ax+1>0$ 的解集.</p> <p>[解] $\because x^2+ax+b<0$ 的解集为 $\{x 1<x<2\}$，$\therefore 1,2$ 是 $x^2+ax+b=0$ 的两根.</p> <p>由韦达定理有 $\begin{cases} -a=1+2, \\ b=1\times 2, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} a=-3, \\ b=2, \end{cases}$</p> <p>代入所求不等式 $bx^2+ax+1>0$，得 $2x^2-3x+1>0$.</p> <p>由 $2x^2-3x+1>0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1)>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$.</p> <p>$\therefore bx^2+ax+1>0$ 的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\right\}$.</p> <p>小结：</p> <p>(1)一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 的解集的端点值是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，也是函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标.</p> <p>(2)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象在 x 轴上方的部分，是由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的 x 的值构成的；图象在 x 轴下方的部分，是由不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的 x 的值构成的，三者之间相互依存、相互转化.</p> <p>巩固练习：</p> <p>1.若不等式 $ax^2+8ax+21<0$ 的解集是 $\{x -7<x<-1\}$，求 a 的值.</p> <p>解析：由题意可知 -7 和 -1 为方程 $ax^2+8ax+21=0$ 的两个根.</p> $-7\times(-1)=\frac{21}{a}, \text{ 故 } a=3.$ <p>2.若不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 的解集为 \mathbf{R}，求实数 a 的取值范围.</p> <p>当 $a-2=0$，即 $a=2$ 时，原不等式为 $-4<0$，所以 $a=2$ 时解集为 \mathbf{R}.</p> <p>当 $a-2\neq 0$ 时，由题意得 $\begin{cases} a-2<0, \\ \Delta<0, \end{cases} \quad \text{综上所述，} a \text{ 的取值范围为 } (-2,2].$</p>	<p>通过本例题的解析,进一步加强一元二次方程、一元二次不等式与二次函数三者之间相互关系。</p>
<p>(五) 课堂总结</p> <p>1. 解一元二次不等式的一般步骤是：(1)化为标准形式；(2)确定判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号；(3)若 $\Delta\geq 0$，则求出该不等式对应的二次方程的根；若 $\Delta<0$，则对应的二次方程无根；(4)联系二次函数的图象得出不等式的解集，特别地，若一元二次不等式的左边的二次三项式能分解因式，则可立即写出不等式的解集(在两根之内或两根之外).</p> <p>2.解含字母参数的一元二次不等式，与解一般的一元二次不等式的基本思路是一致的，但要注意分类讨论思想的运用.</p> <p>3. 解一元二次不等式，应首先尝试因式分解法，若能够进行因式分解，那么在解含参数的不等式时，就可以避免对 $\Delta\leq 0$ 的讨论.</p>	<p>学生根据课堂学习,自主总结知识要点,及运用的思想方法.注意总结自己在学习中的易错点。</p>
<p>(六) 作业布置</p> <p>1、课时练习；2、预习下节课内容。</p>	